Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein PDA. Die binäre Relation $\vdash_M$ auf der Menge der Konfigurationen ist definiert durch

$$(z, ax, A\beta) \vdash_M (z', x, \gamma\beta) \iff (z', \gamma) \in \delta(z, a, A)$$
$$(\text{für } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, x \in \Sigma^*, A \in \Gamma, \beta, \gamma \in \Gamma^*).$$

$\vdash_M^*$ sei die reflexive, transitive Hülle von $\vdash_M$.

Definition. Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein PDA. Die Mengen

$$\mathcal{L}_E(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{es gibt } z \in E, \gamma \in \Gamma^* \text{ mit } (z_0, w, \#) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \gamma)\},$$
$$\mathcal{L}_\#(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{es gibt } z \in Z \text{ mit } (z_0, w, \#) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)\}$$

heißen die ***von M mit Endzustand*** bzw. ***mit leerem Keller akzeptierten Sprachen***.

Beispiel

Sei $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^{\mathrm{R}}\}$. Kellerautomat M, der L mit leerem Keller akzeptiert:

$$M = (\{z_0, z_1\}, \{a, b\}, \{A, B, \#\}, \delta, z_0, \#, \emptyset) \quad \text{mit}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\delta(z_0, a, K) = \{(z_0, AK), (z_1, K)\} \\
\delta(z_0, b, K) = \{(z_0, BK), (z_1, K)\} \\
\delta(z_0, \varepsilon, K) = \{(z_1, K)\}
\end{array}\right\} \text{für } K \in \{A, B, \#\}$$
$$\begin{array}{l}
\delta(z_1, a, A) = \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_1, b, B) = \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_1, \varepsilon, \#) = \{(z_1, \varepsilon)\} \\
(\delta(\ldots) = \emptyset \quad \text{sonst})
\end{array}$$

Satz 1.6.1

a) Zu jedem PDA M_1 gibt es einen PDA M_2 mit $\mathcal{L}_\#(M_2) = \mathcal{L}_{\mathrm{E}}(M_1)$.

b) Zu jedem PDA M_1 gibt es einen PDA M_2 mit $\mathcal{L}_{\mathrm{E}}(M_2) = \mathcal{L}_\#(M_1)$.

Bemerkung

Aus Satz 1.6.1 folgt, dass beide Akzeptanzbegriffe äquivalent sind. (PDA wird oft ohne E definiert, d.h. Akzeptanz nur mit leerem Keller.)

Satz 1.6.2 Eine Sprache L ist genau dann kontextfrei, wenn es einen PDA M gibt mit $\mathcal{L}(M) = L$. ($\mathcal{L}(M)$ steht für $\mathcal{L}_{\mathrm{E}}(M)$ oder $\mathcal{L}_\#(M)$.)

Definition. Ein Kellerautomat $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ heißt ***deterministisch*** (***DPDA***), wenn für alle $z \in Z$, $a \in \Sigma$, $A \in \Gamma$ gilt:

$$|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1.$$

Die ***von einem DPDA M akzeptierte Sprache*** $\mathcal{L}(M)$ ist $\mathcal{L}_{\mathrm{E}}(M)$.

Bemerkungen

1. DPDA: In jeder Konfiguration ist höchstens ein Übergang möglich.
2. Bei DPDA's: Akzeptanz mit Endzustand ist nicht gleichmächtig zu Akzeptanz mit leerem Keller.
3. $\{$reguläre Spr.$\} \subsetneqq \{$von DPDA akzeptierte Spr.$\} \subsetneqq \{$kontextfreie Spr.$\}$.

Definition. Eine Sprache L heißt ***deterministisch kontextfrei***, wenn es einen DPDA M gibt mit $\mathcal{L}(M) = L$.

Bemerkung

Die deterministisch kontextfreien Sprachen spielen in der Compilerbau-Theorie eine große Rolle (Wortproblem in linearer Zeit lösbar).

1.7 Typ-0,1-Sprachen und Turingmaschinen

Definition. Eine (***deterministische***) ***Turingmaschine*** (***TM***) $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ ist gegeben durch:

- eine endliche Menge Z von ***Zuständen***,
- ein ***Eingabealphabet*** Σ,
- ein ***Bandalphabet*** $\Gamma \supseteq \Sigma$,
- eine partielle ***Überführungsfunktion*** $\delta : Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{\mathsf{L}, \mathsf{R}, \mathsf{N}\}$,
- $z_0 \in Z$ (***Startzustand***),
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ (***Leerzeichen***),
- $E \subseteq Z$ (Menge der ***Endzustände***).

Eine ***Konfiguration*** von M ist ein Wort $K \in \Gamma^* Z \Gamma^*$.