Induktive Definition der μ-rekursiven (partiell-rekursiven) Funktionen

1. Die Funktionen C^k, S, U_i^k $(1 \le i \le k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, sind μ-rekursiv.
2. Sind $f, g_1, \ldots, g_n, g$ μ-rekursive Funktionen, so sind $E(f, g_1, \ldots, g_n)$, $PR(f, g)$ μ-rekursive Funktionen.
3. Ist f eine μ-rekursive Funktion, so ist $\mu(f)$ eine μ-rekursive Funktion.

Offenbar gilt: f primitiv-rekursiv $\Longrightarrow f$ μ-rekursiv.

Satz 2.3.1 Jede μ-rekursive Funktion ist `WHILE`-berechenbar.

2.4 Universelle Funktionen

Kodierung von TM-Rechnungen (***Gödelisierung***)

1. Festlegungen (im Folgenden werden nur TMen betrachtet, die Funktionen berechnen)

   Für eine Turingmaschine $M = (Z, \{1\}, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ seien die Elemente von Z, Γ und $\{\mathsf{L}, \mathsf{R}, \mathsf{N}\}$ jeweils fest nummeriert:

   $Z = \{z_0, \ldots, z_p\}$ $\quad (E = \{z_{r_M}, \ldots, z_p\})$,
   $\Gamma = \{a_0, \ldots, a_q\}$ $\quad (a_0 = \Box, a_1 = 1)$,
   $\{\mathsf{L}, \mathsf{R}, \mathsf{N}\} = \{\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3\}$.

   Die Felder des Bandes von M seien nummeriert wie folgt:

$\cdots$	6	4	2	0	1	3	5	$\cdots$

   Jede Rechnung von M beginne mit einer Anfangskonfiguration, in der das Arbeitsfeld das Feld mit der Nummer 1 ist.

2. Gödelnummern von Turingmaschinen

   Sei M eine TM. Jedem Übergang

   $(z_i, a_j) \mapsto (z_{i'}, a_{j'}, \mathsf{X}_s)$

   vermöge der Überführungsfunktion δ von M wird zugeordnet die Zahl

   $paar^5(i, j, i', j', s)$.

   $n_1, \ldots, n_t$ seien alle derartigen Zahlen. Dann sei

   $c(M) = \gamma(r_M, n_1, \ldots, n_t, 1)$ $\qquad$ (***Gödelnummer*** von M).

   Es gilt:

   Es gibt ein primitiv-rekursives Prädikat $istM : \mathbb{N}_0^2 \to \{0,1\}$ mit

   $istM(x) = 1 \iff x$ ist Gödelnummer einer Turingmaschine.

3. Gödelnummern von Konfiguration

   Sei $K = \alpha_1 \ldots \alpha_{l_1} z_i \beta_1 \ldots \beta_{l_2}$ Konfiguration mit

   af = Nummer des Arbeitsfeldes,
   b' = Nummer des Feldes, auf dem α_1 steht,
   b'' = Nummer des Feldes, auf dem β_{l_2} steht,
   $b = max(b', b'')$,
   a_{j_m} = Zeichen, das auf Feld m steht $(0 \le m \le b)$.

   Dann sei

   $c(K) = paar^3(i, af, \gamma(j_0, \ldots, j_b))$ $\qquad$ (***Gödelnummer*** von K).

   Es gilt:

   Es gibt primitiv-rekursive Funktionen $anf : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ und $dec : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und ein primitiv-rekursives Prädikat $end : \mathbb{N}_0^2 \to \{0,1\}$ mit

   $anf(x_1, \ldots, x_k) =$ Gödelnummer der (Anfangs-) Konfiguration $z_0 1^{x_1} \Box 1^{x_2} \Box \ldots \Box 1^{x_k}$,

   $end(x, y) = 1 \iff y$ ist Gödelnummer einer Endkonfiguration $\Box z_e 1^m \Box$, $z_e \in E$, für eine TM mit Gödelnummer x,

   $dec(x) = y$, falls x Gödelnummer einer Endkonfiguration $\Box z_e 1^y \Box$ ist (sonst: beliebig).

4. Gödelnummern von Rechnungen

   Sei $\mathcal{R}$ eine Rechnung $K_0 \vdash K_1 \vdash \ldots \vdash K_e$ einer Turingmaschine (K_0 Anfangskonfiguration, K_e Endkonfiguration). Dann sei

   $c(\mathcal{R}) = \gamma(c(K_0), \ldots, c(K_e), 1)$

   Es gilt:

   Es gibt primitiv-rekursive Funktionen $folg : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ und $erg : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und ein primitiv-rekursives Prädikat $rech : \mathbb{N}_0^2 \to \{0,1\}$ mit

   $folg(x, y) =$ Gödelnummer der Konfiguration K' mit $K \vdash K'$ für die Konfiguration K mit Gödelnummer y vermöge der TM mit Gödelnummer x (falls existent, sonst 0),

   $rech(x, y) = 1 \iff y$ ist Gödelnummer einer Rechnung einer TM mit Gödelnummer x,

   $erg(x) = y$, falls x Gödelnummer einer Rechnung mit Endkonfiguration $\Box z_e 1^y \Box$ ist (sonst: beliebig).

5. Das T-Prädikat

   Es gilt:

   Es gibt ein primitiv-rekursives Prädikat $T : \mathbb{N}_0^{k+2} \to \{0,1\}$ mit

   $T(x, x_1, \ldots, x_k, y) = 1 \iff x$ ist Gödelnummer einer TM M, und y ist Gödelnummer einer mit der Konfiguration $z_0 1^{x_1} \Box 1^{x_2} \Box \ldots \Box 1^{x_k}$ beginnenden Rechnung von M.