

Induktive Definition der μ -rekursiven (partiell-rekursiven) Funktionen

- Die Funktionen C^k, S, U_i^k ($1 \leq i \leq k$), $k \in \mathbb{N}_0$, sind μ -rekursiv.
- Sind f, g_1, \dots, g_n, g μ -rekursive Funktionen, so sind $E(f, g_1, \dots, g_n), PR(f, g)$ μ -rekursive Funktionen.
- Ist f eine μ -rekursive Funktion, so ist $\mu(f)$ eine μ -rekursive Funktion.

Offenbar gilt: f primitiv-rekursiv $\implies f$ μ -rekursiv.

Satz 2.3.1 Jede μ -rekursive Funktion ist WHILE-berechenbar.

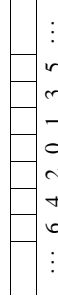
2.4 Universelle Funktionen

Kodierung von TM-Rechnungen (**Gödelisierung**)

- Festlegungen (im Folgenden werden nur TMs betrachtet, die Funktionen berechnen)
Für eine Turingmaschine $M = (Z, \{1\}, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ seien die Elemente von Z, Γ und $\{L, R, N\}$ jeweils fest nummeriert:

$$\begin{aligned} Z &= \{z_0, \dots, z_p\} & (E &= \{z_{r_M}, \dots, z_p\}), \\ \Gamma &= \{a_0, \dots, a_q\} & (a_0 &= \square, a_1 = 1), \\ \{L, R, N\} &= \{X_1, X_2, X_3\}. \end{aligned}$$

Die Felder des Bandes von M seien nummeriert wie folgt:



Jede Rechnung von M beginne mit einer Anfangskonfiguration, in der das Arbeitsfeld das Feld mit der Nummer 1 ist.

- Gödelnummern von Turingmaschinen

Sei M eine TM. Jedem Übergang

$$(z_i, a_j) \mapsto (z_{i'}, a_{j'}, X_s)$$

vermöge der Überföhrungsfunktion δ von M wird zugeordnet die Zahl

$$pair^5(i, j, i', j', s).$$

n_1, \dots, n_u seien alle derartigen Zahlen. Dann sei

$$c(M) = \gamma(r_M, n_1, \dots, n_u, 1) \quad (\text{Gödelnummer von } M).$$

Es gilt:

Es gibt ein primitiv-rekursives Prädikat $istM : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$istM(x) = 1 \iff x \text{ ist Gödelnummer einer Turingmaschine.}$$

- Gödelnummern von Konfiguration

Sei $K = \alpha_1 \dots \alpha_i z_i \beta_1 \dots \beta_k$ Konfiguration mit

- α_f = Nummer des Arbeitsfeldes,
- β' = Nummer des Feldes, auf dem α_1 steht,
- β'' = Nummer des Feldes, auf dem β_k steht,
- $b = max(b', b'')$,
- α_{j_m} = Zeichen, das auf Feld m steht ($0 \leq m \leq b$).

Dann sei

$$c(K) = pair^3(i, \alpha_f, \gamma(j_0, \dots, j_n)) \quad (\text{Gödelnummer von } K).$$

Es gilt:

Es gibt primitiv-rekursive Funktionen $anf : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ und $dec : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ und ein primitiv-rekursives Prädikat $end : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$anf(x_1, \dots, x_k) = \text{Gödelnummer der (Anfangs-) Konfiguration } z_0^1 x_1 \square^1 x_2 \square^1 \dots \square^1 x_k,$$

$$end(x, y) = 1 \iff y \text{ ist Gödelnummer einer Endkonfiguration } \square_{z_e}^1 x^1 \square_{z_e}^1 y \square_{z_e}^1 \text{ für eine TM mit Gödelnummer } x,$$

$$dec(x) = y, \text{ falls } x \text{ Gödelnummer einer Endkonfiguration } \square_{z_e}^1 y \square \text{ ist (sonst: beliebig).}$$

- Gödelnummern von Rechnungen

Sei \mathcal{R} eine Rechnung $K_0 \vdash K_1 \vdash \dots \vdash K_e$ einer Turingmaschine (K_0 Anfangskonfiguration, K_e Endkonfiguration). Dann sei

$$c(\mathcal{R}) = \gamma(c(K_0), \dots, c(K_e), 1)$$

Es gilt:

Es gibt primitiv-rekursive Funktionen $folg : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ und $ery : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ und ein primitiv-rekursives Prädikat $rech : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$folg(x, y) = \text{Gödelnummer der Konfiguration } K' \text{ mit } K \vdash K' \text{ für die Konfiguration } K \text{ mit Gödelnummer } y \text{ vermöge der TM mit Gödelnummer } x \text{ (falls existiert, sonst } 0),$$

$$rech(x, y) = 1 \iff y \text{ ist Gödelnummer einer Rechnung einer TM mit Gödelnummer } x,$$

$$ery(x) = y, \text{ falls } x \text{ Gödelnummer einer Rechnung mit Endkonfiguration } \square_{z_e}^1 y \square \text{ ist (sonst: beliebig).}$$

- Das T -Prädikat

Es gilt:

Es gibt ein primitiv-rekursives Prädikat $T : \mathbb{N}_0^{k+2} \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$T(x, x_1, \dots, x_k, y) = 1 \iff x \text{ ist Gödelnummer einer TM } M, \text{ und } y \text{ ist Gödelnummer einer mit der Konfiguration } z_0^1 x_1 \square^1 x_2 \square^1 \dots \square^1 x_k \text{ beginnenden Rechnung von } M.$$