Komplexitätsklassen

(DTM: deterministische TM; NTM: nicht-deterministische TM)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TIME}_1(f(n)) &= \{L \mid \text{es gibt (Einband-)DTM } M \text{ mit } \mathcal{L}(M) = L \text{ und } t_M(n) = O(f(n))\},\\
\mathsf{TIME}(f(n)) &= \{L \mid \text{es gibt Mehrband-DTM } M \text{ mit } \mathcal{L}(M) = L \text{ und } t_M(n) = O(f(n))\},\\
\mathsf{NTIME}_1(f(n)) &= \{L \mid \text{es gibt (Einband-)NTM } M \text{ mit } \mathcal{L}(M) = L \text{ und } t_M(n) = O(f(n))\},\\
\mathsf{NTIME}(f(n)) &= \{L \mid \text{es gibt Mehrband-NTM } M \text{ mit } \mathcal{L}(M) = L \text{ und } t_M(n) = O(f(n))\}.
\end{aligned}
$$

Einige Zusammenhänge zwischen diesen Klassen

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TIME}(f(n)) &\subseteq \mathsf{TIME}_1(f^2(n)),\\
\mathsf{NTIME}(f(n)) &\subseteq \mathsf{NTIME}_1(f^2(n)),\\
\mathsf{TIME}_1(f(n)) &\subseteq \mathsf{NTIME}_1(f(n)),\\
\mathsf{TIME}(f(n)) &\subseteq \mathsf{NTIME}(f(n)),\\
\mathsf{NTIME}(f(n)) &\subseteq \mathsf{TIME}(2^{O(f(n))}).
\end{aligned}
$$

3.2 NP - Vollständigkeit

Die Komplexitätsklassen P und NP

$$\mathsf{P} = \{L \mid \text{es gibt ein Polynom } p(n) \text{ mit } L \in \mathsf{TIME}_1(p(n))\}.$$
$$\mathsf{NP} = \{L \mid \text{es gibt ein Polynom } p(n) \text{ mit } L \in \mathsf{NTIME}_1(p(n))\}.$$

Es gilt:

$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$.

Offene Frage

$\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$ (P=NP - Problem).

Bedeutung

1. Sprache (d.h. Problem) $\notin$ P: unter praktischen Aspekten nicht berechenbar (da zu ineffizient). Typische Beispiele: Probleme mit exponentieller Zeitkomplexität $O(2^n)$.
2. Viele wichtige Probleme sind $\in$ NP. Wäre $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, hätte man zumindest Hoffnung auf ihre mögliche Algorithmisierung.

Vermutung

$\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$.

Einfache Eigenschaften von P und NP

1. P ist abgeschlossen unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplementbildung.
2. NP ist abgeschlossen unter Vereinigung und Durchschnitt (Abschluss unter Komplementbildung: unbekannt).
3. $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{EXP} := \{L \mid$ es gibt ein Polynom p mit $L \in \mathsf{TIME}(2^{p(n)})\}$
   (d.h.: Jedes NP-Problem ist deterministisch mit exponentieller Zeitkomplexität lösbar).

Definition. $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ seien Sprachen. L_1 heißt ***polynomiell reduzierbar*** auf L_2 (in Zeichen: $L_1 \leq_p L_2$), wenn es ein Polynom $p(n)$ und eine DTM M mit $t_M(n) = O(p(n))$ gibt, die zu jedem $w_1 \in \Sigma_1^*$ ein $w_2 \in \Sigma_2^*$ erzeugt mit $w_1 \in L_1 \Leftrightarrow w_2 \in L_2$.

Definition. Eine Sprache L heißt ***NP-hart***, wenn $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathsf{NP}$ gilt. (Informell: L ist mindestens so schwierig wie jedes Problem in NP.) L heißt ***NP-vollständig***, wenn $L \in \mathsf{NP}$ und L NP-hart ist.

Satz 3.2.1 Sei L NP-vollständig. Dann gilt:

a) $L \in \mathsf{P} \iff \mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

b) $L' \in \mathsf{NP}$ und $L \leq_p L' \implies L'$ NP-vollständig.

Bemerkungen

1. Könnte man für *eine* NP-vollständige Sprache zeigen, dass sie in P ist, so wäre $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.
2. Methode zum Nachweis der NP-Vollständigkeit einer Sprache L': Zeige $L' \in \mathsf{NP}$ und $L \leq_p L'$ für eine andere NP-vollständige Sprache L.