Übungen zu Einführung in die Informatik IV
(Prof. Dr. F. Kröger, Dr. P. Kosiuczenko, D. Pattinson)

Aufgabe 45

Die Länge $\ell(P)$ von LOOP-Programmen und Anweisungen P sei induktiv wie folgt definiert:

$$\ell(P) = \begin{cases} 1 & \text{falls } P \text{ eine Zuweisung ist} \\ \ell(P_1) + 1 & \text{falls } P \text{ von der Form } \textbf{loop } x \textbf{ do } P_1 \textbf{ enddo} \text{ ist} \\ \ell(P_1) + \ell(P_2) & \text{falls } P \text{ die Gestalt } P_1; P_2 \text{ hat} \end{cases}$$

Ein LOOP-Programm P heiße *variablennormiert*, falls in P höchstens die Variablen $x_0, \ldots, x_{2\ell(P)}$ vorkommen. Für jedes variablennormierte LOOP-Programm P bezeichne $res(P)$ den Wert der Variablen x_0 nach Ausführung von P, falls jede in P vorkommende Variable anfangs mit 0 vorbesetzt ist.

Die Funktion $bb : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ („Busy Beaver"-Funktion) sei definiert durch

$$bb(n) = max\ \{res(P) \mid P \text{ variablennormiertes LOOP-Programm mit } \ell(P) \leq n + 1\}$$

a) Begründen Sie, warum die Funktion bb total und intuitiv berechenbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion bb streng monoton ist.

c) Zeigen Sie, dass bb nicht LOOP-berechenbar ist.

Aufgabe 46

Zu einer partiellen Funktion $f(m, n)$ und $m \in \mathbb{N}_0$ sei die Menge M_f^m definiert durch

$$M_f^m = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid f(m, k) \text{ ist definiert für alle } k \leq n \text{ und } f(m, n) = 0\}$$

Die partielle Funktion $h_f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei definiert als $h_f(m) = minM_f^m$, falls $M_f^m \neq \emptyset$, ansonsten ist $h_f(m)$ undefiniert. (Dabei bezeichnet $minM$ das kleinste Element der Menge M.)

a) Ist f WHILE-berechenbar, so ist auch h_f WHILE-berechenbar.

b) Ist f total, injektiv und WHILE-berechenbar, so ist auch

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} z & \text{wenn } f(z) = x \\ \text{undef.} & \text{sonst} \end{cases}$$

WHILE-berechenbar.

Aufgabe 47

Ein (nichtdeterministischer) Zweikellerautomat ist ähnlich zu einem Kellerautomaten, benutzt aber zwei Keller statt einem. Seine Überführungsfunktion hängt von aktuellem Zustand, Eingabezeichen und den obersten Kellerzeichen beider Keller ab. Formal wird ein Zweikellerautomat $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ beschrieben wie ein PDA, allerdings mit einer Überführungsfunktion

$$\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \to \mathfrak{P}_e(Z \times \Gamma^* \times \Gamma^*).$$

Eine Konfiguration von M wird demzufolge beschrieben als Quadrupel $(z, w, \lambda, \rho) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^*$.

Erläutern Sie, wie eine durch eine nichtdeterministische Turingmaschine akzeptierte Sprache auch durch einen Zweikellerautomaten (mit Endzustand) akzeptiert werden kann.

Aufgabe 48 (**H**, 3 + 3 Punkte)

Geben Sie LOOP-Programme zur Berechnung der folgenden Funktionen an. Dabei seien konventionsgemäß die Variablen $x_1, x_2, \ldots$ mit den Argumenten der Funktionen belegt, und das Ergebnis soll in der Variablen x_0 berechnet werden. Erläutern Sie die Wirkungsweise Ihrer Programme.

a) $f(m, n) = m \; mod \; n$ mit $m \; mod \; 0 = m$

b) Fibonacci-Funktion mit $fib(0) = 0$, $fib(1) = 1$ und $fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)$

Die Konstrukte arithmetische Differenz $x \dot{-} y$, Summe $x + y$ und bedingte Anweisung **if** $y = 0$ **then** P_1 **else** P_2 **endif** dürfen verwendet werden.

Aufgabe 49 (**H**, 3 + 3 Punkte)

Sei $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ eine Polynomfunktion mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion p ist LOOP-berechenbar.

b) Die Funktion

$$l(a) = \begin{cases} \text{die kleinste Lösung } x \in \mathbb{N}_0 \text{ von } p(x) = a & \text{falls } p(x) = a \text{ lösbar} \\ \text{undef.} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist WHILE-berechenbar.

Die Konstrukte arithmetische Differenz $x \dot{-} y$, Summe $x + y$ und bedingte Anweisung **if** $y = 0$ **then** P_1 **else** P_2 **endif** dürfen verwendet werden.

Abgabe: In der Woche vom 9. bis 13. Juli in den Übungen.