Übungen zu Einführung in die Informatik IV
(Prof. Dr. F. Kröger, Dr. P. Kosiuczenko, D. Pattinson)

Aufgabe 50

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind. Geben Sie dazu Ausdrücke an, die aus den Grundfunktionen C^k, S, U_i^k und zuvor definierten Funktionen mittels Einsetzung E und primitiver Rekursion PR gebildet sind, und weisen Sie nach, dass dadurch die jeweilige Funktion dargestellt wird. Die in der Vorlesung besprochene Additionsfunktion $add(m,n) = m+n$ darf als zusätzliche Grundfunktion benutzt werden.

a) Multiplikation $mult(m,n) = m * n$

b) Vorgängerfunktion $p(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ n-1 & \text{sonst} \end{cases}$

c) arithmetische Differenz $sub(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } m < n \\ m-n & \text{sonst} \end{cases}$

d) Konditional $cond(b,m,n) = \begin{cases} m & \text{falls } b = 0 \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 51

Zeigen Sie:

a) Die Fibonacci-Funktion $fib(n)$, definiert durch $fib(0) = 0$, $fib(1) = 1$ und $fib(n+2) = fib(n) + fib(n+1)$, ist primitiv rekursiv.

b) Wir nennen eine Funktion $g : \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ *primitiv rekursiv*, wenn für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $g_k : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$, $g_k(x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$ primitiv rekursiv ist.

   Seien $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ und $g : \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ primitiv rekursiv. Dann ist $h = \mathrm{WVR}(f,g) : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$ primitiv rekursiv.

Aufgabe 52

Es sei $f : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$ eine partielle Funktion. Wir definieren die Menge

$$M_x = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid y < x, f(x_1, \ldots, x_k, z) \text{ ist definiert für alle } z \le y \text{ und } f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0\}$$

und die Funktionen $\bar{\exists}(f), \bar{\mu}(f) : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$ durch

$$\bar{\exists}(f)(x_1, \ldots, x_k, x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } M_x \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\bar{\mu}(f)(x_1, \ldots, x_k, x) = \begin{cases} min(M) & \text{falls } M_x \neq \emptyset \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Ist f primitiv-rekursiv, so sind gilt dies auch für $\bar{\exists}(f)$ und $\bar{\mu}(f)$. Dabei dürfen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 50 verwenden.

Aufgabe 53 (**H**, 6 Punkte)

Es sei $g(n)$ die Anzahl der Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{a, b, c, d\}$, die den Buchstaben a in gerader Anzahl enthalten. Zum Beispiel gilt $g(0) = 1$, $g(1) = 3$, $g(2) = 10$.

Zeigen Sie, dass die Funktion g primitiv-rekursiv ist. Dabei dürfen die in Aufgabe 50 angegebenen Funktionen verwendet werden.

Aufgabe 54 (**H**, 3 + 3 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Die Funktionen h_0, h_1 und $h_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} h_0(0) &= 1 & \qquad h_0(y+1) &= h_2(y) \\ h_1(0) &= 0 & \qquad h_1(y+1) &= h_0(y) \\ h_2(0) &= 0 & \qquad h_2(y+1) &= h_1(y) \end{aligned}$$

definiert sind, sind primitiv rekursiv.

b) Sind $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ und $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{N}_0^{k+n+1} \to \mathbb{N}_0$ primitiv rekursiv, so sind die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} h_i(\vec{x}, 0) &= f_i(\vec{x}) \\ h_i(\vec{x}, y+1) &= g_i(\vec{x}, y, h_1(\vec{x}, y), \ldots, h_n(\vec{x}, y)) \end{aligned}$$

definierten Funktionen $h_i : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv für alle $i = 1, \ldots, n$.

Abgabe: In der Woche vom 16. bis 20. Juli in den Übungen.