Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Dr. S. Merz

SS 2001
Begleitblatt 10

Temporale Logik

Erweiterungen von PLTL

Das Prinzip der fundierten Ordnungen

Definition. Sei W eine Menge. Eine binäre Relation $\preceq$ auf W heißt *fundierte Ordnung* (und W heißt *fundierte Menge*), falls gilt:

- $\preceq$ ist partielle Ordnung,
- es gibt keine unendliche Teilmenge $\{w_1, w_2, w_3, \ldots\} \subseteq W$ mit $w_1 \succ w_2 \succ w_3 \succ \ldots$

Transfinites Induktionsprinzip. Sei $\preceq$ eine fundierte Ordnung auf der Menge W und ρ eine einstellige Relation auf W. Falls für jedes $w \in W$ gilt:

$\rho(\overline{w})$ für alle $\overline{w} \prec w \quad \Longrightarrow \quad \rho(w)$

dann gilt $\rho(w)$ für alle $w \in W$.

Erweiterung des formalen Systems Σ_{PLTL}

(po1)	$z \preceq z$
(po2)	$z_1 \preceq z_2 \wedge z_2 \preceq z_3 \rightarrow z_1 \preceq z_3$
(po3)	$z_1 \preceq z_2 \wedge z_2 \preceq z_1 \rightarrow z_1 = z_2$
(ti)	$\forall z\, (\forall \overline{z}\, (\overline{z} \prec z \rightarrow A_z(\overline{z})) \rightarrow A) \rightarrow A$

Abgeleitete Regel

(wfo) $A \rightarrow \Diamond(B \vee \exists \overline{z}\, (\overline{z} \prec z \wedge A_z(\overline{z}))) \vdash (\exists z\; A) \rightarrow \Diamond B$ falls z nicht in B vorkommt

(1)	$A \rightarrow \Diamond(B \vee \exists \overline{z}\, (\overline{z} \prec z \wedge A_z(\overline{z})))$	Annahme
(2)	$\Diamond A \rightarrow \Diamond(B \vee \exists \overline{z}\, (\overline{z} \prec z \wedge A_z(\overline{z})))$	(T31)(1)
(3)	$\Diamond A \rightarrow \Diamond B \vee \exists \overline{z}\, (\Diamond(\overline{z} \prec z) \wedge \Diamond A_z(\overline{z}))$	(T18)(T22)(T56)(2)
(4)	$\neg(\overline{z} \prec z) \rightarrow \bigcirc\neg(\overline{z} \prec z)$	(ltl6)
(5)	$\neg(\overline{z} \prec z) \rightarrow \Box\neg(\overline{z} \prec z)$	(ind1)(4)
(6)	$\Diamond(\overline{z} \prec z) \rightarrow \overline{z} \prec z$	(prop)(T2)(5)
(7)	$\Diamond A \rightarrow \Diamond B \vee \exists \overline{z}\, (\overline{z} \prec z \wedge \Diamond A_z(\overline{z}))$	(pred)(3)(6)
(8)	$\exists \overline{z}\, (\overline{z} \prec z \wedge \Diamond A_z(\overline{z})) \wedge \forall \overline{z}\, (\overline{z} \prec z \rightarrow (\Diamond A_z(\overline{z}) \rightarrow \Diamond B)) \rightarrow \Diamond B$	(pred)
(9)	$\Diamond A \wedge \forall \overline{z}\, (\overline{z} \prec z \rightarrow (\Diamond A_z(\overline{z}) \rightarrow \Diamond B)) \rightarrow \Diamond B$	(prop)(T11)(7)(8)
(10)	$\forall \overline{z}\, (\overline{z} \prec z \rightarrow (\Diamond A_z(\overline{z}) \rightarrow \Diamond B)) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$	(prop)(9)
(11)	$\Diamond A \rightarrow \Diamond B$	(ti)(mp)(10)
(12)	$A \rightarrow \Diamond A$	(T5)
(13)	$A \rightarrow \Diamond B$	(prop)(11)(12)
(14)	$(\exists z\; A) \rightarrow \Diamond B$	(par)(13)

Quantifizierung über flexible Individuensymbole

Erweiterung der Syntaxregel (3) von $\mathcal{L}_{PLTL}$

3. Ist A eine Formel und $u \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^F$, so ist $\exists u\, A$ eine Formel.

Semantik

Sei $\mathbb{K} = (\mathbb{S}, \mathbb{W})$.

Für $x \in \mathcal{X}$: $\mathbb{K}_i^{(\xi)}(\exists x\, A) = \mathbf{t} \iff$ es gibt ξ' mit $\xi' \sim_x \xi$ und $\mathbb{K}_i^{(\xi')}(A) = \mathbf{t}$ (wie bisher).

Für $a \in \mathcal{X}^F$: $\mathbb{K}_i^{(\xi)}(\exists a\, A) = \mathbf{t} \iff$ es gibt $\mathbb{W}'$ mit $\mathbb{W}' \sim_a \mathbb{W}$, $\overline{\mathbb{K}} = (\mathbb{S}, \mathbb{W}')$ und $\overline{\mathbb{K}}_i^{(\xi)}(A) = \mathbf{t}$.
Dabei: $(\eta'_0, \eta'_1, \eta'_2, \ldots) \sim_a (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots) \iff \eta'_i \sim_a \eta_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.