Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Dr. S. Merz

SS 2001
Begleitblatt 14

Temporale Logik

CTL (Computation Tree Logic)

Sprache

Sei $\mathcal{V}$ eine (höchstens abzählbar unendliche) Menge von *atomaren Aussagen*. Eine Sprache $\mathcal{L}_{CTL}(\mathcal{V})$ (kurz: $\mathcal{L}_{CTL}$) von CTL ist gegeben wie $\mathcal{L}^b_{LTL}(\mathcal{V})$, aber mit temporalen Operatoren

$\exists\circ$, $\exists\Box$ (einstellig) und $\exists$**until** (zweistellig) (in anderer Schreibweise: **EX**, **EG**, **EU**)

anstelle von $\circ$, $\Box$ und **until**.

Semantik

Eine *temporale Struktur* (Kripke-Struktur) $\mathbb{K} = (\mathbb{W}, I, T)$ für $\mathcal{L}_{CTL}$ ist gegeben durch:

- eine Menge $\mathbb{W}$ von Zuständen $\eta : \mathcal{V} \to \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$,
- eine Menge $I \subseteq \mathbb{W}$ von Anfangszuständen und
- eine binäre (links-)totale Relation T auf $\mathbb{W}$.

Ein *η-Pfad* ist eine unendliche Folge $(\eta_0, \eta_1, \ldots)$ mit $\eta_0 = \eta$ und $(\eta_i, \eta_{i+1}) \in T$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
Induktive Definition von $\mathbb{K}^{(\eta)}(F) \in \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$ für jede Formel F von $\mathcal{L}_{CTL}$ und jedes $\eta \in \mathbb{W}$:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{K}^{(\eta)}(v) = \eta(v) & & \text{für } v \in \mathcal{V} \\
\mathbb{K}^{(\eta)}(\textbf{false}) = \mathbf{f} & & \\
\mathbb{K}^{(\eta)}(A \to B) = \mathbf{t} & \iff & \mathbb{K}^{(\eta)}(A) = \mathbf{f} \text{ oder } \mathbb{K}^{(\eta)}(B) = \mathbf{t} \\
\mathbb{K}^{(\eta)}(\exists\circ A) = \mathbf{t} & \iff & \mathbb{K}^{(\eta')}(A) = \mathbf{t} \text{ für ein } \eta' \text{ mit } (\eta, \eta') \in T \\
\mathbb{K}^{(\eta)}(\exists\Box A) = \mathbf{t} & \iff & \text{es gibt einen } \eta\text{-Pfad } \eta_0, \eta_1, \ldots, \text{ so dass } \mathbb{K}^{(\eta_i)}(A) = \mathbf{t} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0 \\
\mathbb{K}^{(\eta)}(A \,\exists\textbf{until}\, B) = \mathbf{t} & \iff & \text{es gibt einen } \eta\text{-Pfad } \eta_0, \eta_1, \ldots \text{ und } k \in \mathbb{N}_0, \text{ so dass } \mathbb{K}^{(\eta_k)}(B) = \mathbf{t} \\
& & \text{und } \mathbb{K}^{(\eta_j)}(A) = \mathbf{t} \text{ für alle } 0 \le j < k
\end{array}
$$

Eine Formel F heißt *gültig in der temporalen Struktur* $\mathbb{K}$ ($\models_{\mathbb{K}} F$), wenn $\mathbb{K}^{(\eta)}(F) = \mathbf{t}$ gilt für alle $\eta \in I$. F heißt *allgemeingültig*, wenn $\models_{\mathbb{K}} F$ gilt für alle $\mathbb{K}$.

Abkürzungen

$\forall\circ A$ (bzw. **AX** A)	für	$\neg\exists\circ\neg A$	“in allen Nachfolgezuständen”
$\forall\Diamond A$ (bzw. **AF** A)	für	$\neg\exists\Box\neg A$	“auf allen Pfaden irgendwann einmal”
$\exists\Diamond A$ (bzw. **EF** A)	für	**true** $\exists$**until** A	“auf mindestens einem Pfad irgendwann einmal”
$\forall\Box A$ (bzw. **AG** A)	für	$\neg\exists\Diamond\neg A$	“auf allen Pfaden immer”
$A\,\forall$**unless** B (bzw. A **AW** B)	für	$\neg(\neg B\,\exists$**until** $\neg A)$	“auf allen Pfaden A mindestens so lange, bis B”
$A\,\forall$**until** B (bzw. A **AU** B)	für	$A\,\forall$**unless** $B \wedge$ **AF** B	“auf allen Pfaden irgendwann B und bis dahin A”
$A\,\exists$**unless** B (bzw. A **EW** B)	für	$\neg(\neg B\,\forall$**until** $\neg A)$	“auf einem Pfad A mindestens so lange, bis B”

Rekursive Charakterisierungen

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\exists\Box A & \leftrightarrow & A \wedge \exists\circ\exists\Box A & A \,\exists\textbf{until}\, B & \leftrightarrow & B \vee (A \wedge \exists\circ(A \,\exists\textbf{until}\, B)) \\
\exists\Diamond A & \leftrightarrow & A \vee \exists\circ\exists\Diamond A & A \,\exists\textbf{unless}\, B & \leftrightarrow & B \vee (A \wedge \exists\circ(A \,\exists\textbf{unless}\, B)) \\
\forall\Box A & \leftrightarrow & A \wedge \forall\circ\forall\Box A & A \,\forall\textbf{until}\, B & \leftrightarrow & B \vee (A \wedge \forall\circ(A \,\forall\textbf{until}\, B)) \\
\forall\Diamond A & \leftrightarrow & A \vee \forall\circ\forall\Diamond A & A \,\forall\textbf{unless}\, B & \leftrightarrow & B \vee (A \wedge \forall\circ(A \,\forall\textbf{unless}\, B))
\end{array}
$$