Ludwig-Maximilians-Universität München **SS 2001**
Institut für Informatik **Begleitblatt 15**
Dr. S. Merz

Temporale Logik

Model checking von CTL

Definition. Sei $\mathbb{K}$ temporale Struktur und F Formel von $\mathcal{L}_{CTL}$. Die Menge

$$\langle F \rangle \;=\; \{\eta \in \mathbb{W} \;\mid\; \mathbb{K}^{(\eta)}(F) = \mathbf{t}\}$$

heißt *Erfüllungsmenge* von F in $\mathbb{K}$. Es gilt $\models_{\mathbb{K}} F$ genau dann, wenn $I \subseteq \langle F \rangle$.
Induktive Bestimmung von $\langle F \rangle$:

$$\begin{array}{rcl}
\langle v \rangle & = & \{\eta \in \mathbb{W} \;\mid\; \eta(v) = \mathbf{t}\} \\
\langle \mathbf{false} \rangle & = & \emptyset \\
\langle A \to B \rangle & = & (\mathbb{W} \setminus \langle A \rangle) \cup \langle B \rangle \\
\langle \exists\bigcirc A \rangle & = & \{\eta \in \mathbb{W} \;\mid\; \text{es gibt } \eta' \text{ mit } (\eta, \eta') \in T \text{ und } \eta' \in \langle A \rangle\} \quad =_{\text{def}} \quad T^{-1}(\langle A \rangle)
\end{array}$$

Bestimmung von $\langle \exists\Box\, A \rangle$ und $\langle A \,\exists\mathbf{until}\, B \rangle$

Im folgenden sei $\mathbb{K} = (\mathbb{W}, I, T)$ temporale Struktur mit *endlicher* Zustandsmenge $\mathbb{W}$. Wir schreiben im folgenden $\mathcal{P}$ für die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{W})$ von $\mathbb{W}$.

Definition. Eine Abbildung $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ heißt *monoton*, wenn für alle $P, Q \in \mathcal{P}$ gilt:

$$P \subseteq Q \Longrightarrow \pi(P) \subseteq \pi(Q)$$

Eine Menge $P \in \mathcal{P}$ heißt *Fixpunkt* von π, wenn $\pi(P) = P$ gilt.

Lemma 7.2.1. Ist $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ monoton, so gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$:

(a) $\pi^i(\emptyset) \subseteq \pi^{i+1}(\emptyset)$

(b) $\pi^i(Z) \supseteq \pi^{i+1}(Z)$

Lemma 7.2.2. Sei $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ monoton, KFP$(\pi) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \pi^i(\emptyset)$ und GFP$(\pi) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} \pi^i(Z)$.
Dann sind KFP(π) und GFP(π) Fixpunkte von π.
Da $\mathbb{W}$ endlich ist, muss ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $\pi^i(\emptyset) = \pi^{i+1}(\emptyset)$ bzw. $\pi^i(Z) = \pi^{i+1}(Z)$ existieren. Daher können KFP(π) und GFP(π) effektiv durch Iteration berechnet werden.

Für Formeln A, B von $\mathcal{L}_{CTL}$ seien die Abbildungen $\pi_1, \pi_2 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definiert durch

$$\begin{array}{rcl}
\pi_1(M) & = & \langle A \rangle \cap T^{-1}(M) \\
\pi_2(M) & = & \langle B \rangle \cup (\langle A \rangle \cap T^{-1}(M))
\end{array}$$

Lemma 7.2.3. Die Abbildungen π_1 und π_2 sind (für beliebige A, B) monoton.

Satz 7.2.4. $\langle \exists\Box\, A \rangle = $ GFP(π_1)

Satz 7.2.5. $\langle A \,\exists\mathbf{until}\, B \rangle = $ KFP(π_2)