Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Dr. S. Merz

SS 2001
Begleitblatt 2

Temporale Logik

Lineare temporale Aussagenlogik

Sprache

Sei $\mathcal{V}$ eine (höchstens abzählbar unendliche) Menge von *atomaren Aussagen*.

Eine (Basis-) *Sprache* $\mathcal{L}_{LTL}(\mathcal{V})$ (kurz: $\mathcal{L}_{LTL}$) *der (linearen) temporalen Aussagenlogik* ist gegeben durch:

Alphabet:

- alle Elemente von $\mathcal{V}$,
- die Zeichen **false**, $\rightarrow$, $\circ$, $\Box$, (,).

Induktive Definition der Formeln:

1. Jede atomare Aussage $v \in \mathcal{V}$ ist eine Formel.
2. **false** ist eine Formel.
3. Sind A und B Formeln, so ist auch $(A \rightarrow B)$ eine Formel.
4. Ist A eine Formel, so sind auch $\circ A$ und $\Box A$ Formeln.

Abkürzungen:

- $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, **true**: wie in klassischer Aussagenlogik
- $\Diamond A$ für $\neg\Box\neg A$

Semantik

Eine *temporale Struktur (Kripke-Struktur)* für $\mathcal{L}_{LTL}$ ist eine unendliche Folge $\mathbb{K} = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots)$ von Abbildungen $\eta_i : \mathcal{V} \rightarrow \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$. Die η_i heißen *Zustände*; η_0 heißt *Anfangszustand* der Struktur $\mathbb{K}$.

Sei $\mathbb{K}$ temporale Struktur für $\mathcal{L}_{LTL}$. Induktive Definition von $\mathbb{K}_i(F) \in \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$ für jede Formel F von $\mathcal{L}_{LTL}$ und jedes $i \in \mathbb{N}_0$ ("Wahrheitswert von F im Zustand η_i"):

1. $\mathbb{K}_i(v) = \eta_i(v)$ für $v \in \mathcal{V}$
2. $\mathbb{K}_i(\textbf{false}) = \mathbf{f}$
3. $\mathbb{K}_i(A \rightarrow B) = \mathbf{t} \iff \mathbb{K}_i(A) = \mathbf{f}$ oder $\mathbb{K}_i(B) = \mathbf{t}$
4. $\mathbb{K}_i(\circ A) = \mathbb{K}_{i+1}(A)$
5. $\mathbb{K}_i(\Box A) = \mathbf{t} \iff \mathbb{K}_j(A) = \mathbf{t}$ für alle $j \geq i$

Für die weiteren Operatoren gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_i(\neg A) = \mathbf{t} &\iff \mathbb{K}_i(A) = \mathbf{f} \\
\mathbb{K}_i(A \vee B) = \mathbf{t} &\iff \mathbb{K}_i(A) = \mathbf{t} \text{ oder } \mathbb{K}_i(B) = \mathbf{t} \\
\mathbb{K}_i(A \wedge B) = \mathbf{t} &\iff \mathbb{K}_i(A) = \mathbf{t} \text{ und } \mathbb{K}_i(B) = \mathbf{t} \\
\mathbb{K}_i(A \leftrightarrow B) = \mathbf{t} &\iff \mathbb{K}_i(A) = \mathbb{K}_i(B) \\
\mathbb{K}_i(\mathbf{true}) = \mathbf{t} & \\
\mathbb{K}_i(\Diamond A) = \mathbf{t} &\iff \mathbb{K}_j(A) = \mathbf{t} \text{ für ein } j \geq i
\end{aligned}$$

Eine Formel A heißt *gültig in der temporalen Struktur* $\mathbb{K}$ (in Zeichen: $\models_{\mathbb{K}} A$), wenn $\mathbb{K}_i(A) = \mathbf{t}$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Die Formel A heißt *allgemeingültig* ($\models A$), wenn $\models_{\mathbb{K}} A$ gilt für alle $\mathbb{K}$. A heißt *erfüllbar*, wenn es eine temporale Struktur $\mathbb{K}$ und ein $i \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $\mathbb{K}_i(A) = \mathbf{t}$. A *folgt aus* einer Formelmenge $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models A$ bzw. $B_1, \ldots, B_n \models A$), wenn $\models_{\mathbb{K}} A$ gilt für jede temporale Struktur $\mathbb{K}$ mit $\models_{\mathbb{K}} B$ für alle $B \in \mathcal{F}$.

Lemma 2.1.1. Seien A und B Formeln, $\mathbb{K} = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots)$ und $\mathbb{K}' = (\eta'_0.\eta'_1, \eta'_2, \ldots)$ temporale Strukturen, und $i \in \mathbb{N}_0$.

(a) Falls $\mathbb{K}_i(A) = \mathbf{t}$ und $\mathbb{K}_i(A \rightarrow B) = \mathbf{t}$, so ist $\mathbb{K}_i(B) = \mathbf{t}$.

(b) Falls $\eta'_j = \eta_{i+j}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$, so ist $\mathbb{K}'_j(A) = \mathbb{K}_{i+j}(A)$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Satz 2.1.2. Falls $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$, so $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Satz 2.1.3. $A_1, \ldots, A_n \models B$ genau dann, wenn $\models \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \rightarrow B$.

Satz 2.1.4. Falls $\mathcal{F} \models A$ und $\mathcal{F} \models A \rightarrow B$, so $\mathcal{F} \models B$.

Satz 2.1.5. Falls $\mathcal{F} \models A$, so gilt $\mathcal{F} \models \circ A$ und $\mathcal{F} \models \Box A$. (Insbesondere: $A \models \circ A$ und $A \models \Box A$.)

Satz 2.1.6. $\models A$ gilt genau dann, wenn $\neg A$ nicht erfüllbar ist.

Beispiele von Formeln mit informeller Bedeutung

$A \rightarrow \Box B$	Falls A gilt, so gilt ab sofort immer B.
$A \rightarrow \Diamond B$	Falls A gilt, so gilt irgendwann einmal (sofort oder in der Zukunft) B.
$\Box(A \rightarrow B)$	Wann immer (ab sofort) A gilt, gilt auch B.
$\Box(A \rightarrow \Diamond B)$	Jedes Eintreten von A wird von einem Eintreten von B gefolgt.
$\Diamond(A \wedge \circ\neg A)$	Irgendwann einmal gilt A und unmittelbar danach nicht A.
$\Diamond\Box A$	Irgendwann einmal gilt A permanent.
$\Box\Diamond A$	Jeder zukünftige Zeitpunkt wird von einem Zeitpunkt gefolgt, zu dem A gilt. D.h.: A gilt unendlich oft.