Ludwig-Maximilians-Universität München **SS 2001**
Institut für Informatik **Begleitblatt 4**
Dr. S. Merz

Temporale Logik

Axiomatisierung von LTL

Das formale System Σ_{LTL}

Axiome:

(taut) alle aussagenlogisch gültigen Formeln
(ltl1) $\neg\circ A \leftrightarrow \circ\neg A$
(ltl2) $\circ(A \to B) \to (\circ A \to \circ B)$
(ltl3) $\Box A \to A \land \circ\Box A$

Regeln:

(mp) $A,\ A \to B \vdash B$
(nex) $A \vdash \circ A$
(ind) $A \to B,\ A \to \circ A \vdash A \to \Box B$

Satz 2.3.1. (Korrektheitssatz für Σ_{LTL})
Falls $\mathcal{F} \vdash A$, so $\mathcal{F} \models A$. (Insbesondere: Falls $\vdash A$, so $\models A$.)

Satz 2.3.2. Folgt B aussagenlogisch aus $A_1, \ldots, A_n$, so gilt $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

Abgeleitete Regeln

(ind1) $A \to \circ A \vdash A \to \Box A$
(ind2) $A \to B,\ B \to \circ B \vdash A \to \Box B$
(alw) $A \vdash \Box A$
(som) $A \to \circ B \vdash A \to \Diamond B$

Das Deduktionstheorem

Satz 2.3.3. (Deduktionstheorem der linearen temporalen Aussagenlogik)
A, B seien Formeln, $\mathcal{F}$ Menge von Formeln. Falls $\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash B$, so auch $\mathcal{F} \vdash \Box A \to B$.

Spezialfälle des Deduktionstheorems:

1. Falls $A \vdash B$, so $\vdash \Box A \to B$.
2. Falls $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, so $\vdash \Box A_1 \land \ldots \land \Box A_n \to B$.

Satz 2.3.4. A, B seien Formeln, $\mathcal{F}$ Menge von Formeln. Falls $\mathcal{F} \vdash \Box A \to B$, so auch $\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash B$.

Beispiele für Herleitungen

(ltl2') $(\circ A \to \circ B) \to \circ(A \to B)$

(1)	$\neg(A \to B) \to A$	(taut)
(2)	$\circ(\neg(A \to B) \to A)$	(nex)(1)
(3)	$\circ(\neg(A \to B) \to A) \to (\circ\neg(A \to B) \to \circ A)$	(ltl2)
(4)	$\circ\neg(A \to B) \to \circ A$	(mp)(2)(3)
(5)	$\neg\circ(A \to B) \leftrightarrow \circ\neg(A \to B)$	(ltl1)
(6)	$\neg\circ(A \to B) \to \circ A$	(prop)(5)(6)
(7)	$\neg(A \to B) \to \neg B$	(taut)
(8)	$\neg\circ(A \to B) \to \circ\neg B$	[ebenso wie (6)]
(9)	$\circ\neg B \to \neg\circ B$	(prop)(ltl1)
(10)	$\neg\circ(A \to B) \to \neg\circ B$	(prop)(8)(9)
(11)	$\neg\circ(A \to B) \to \neg(\circ A \to \circ B)$	(prop)(6)(10)
(12)	$(\circ A \to \circ B) \to \circ(A \to B)$	(prop)(11)

(ltl3') $A \wedge \circ\Box A \to \Box A$

(1)	$A \wedge \circ\Box A \to A$	(taut)
(2)	$\Box A \to A \wedge \circ\Box A$	(ltl3)
(3)	$\circ\Box A \to \circ(A \wedge \circ\Box A)$	(nex)(ltl2)(mp)(2)
(4)	$A \wedge \circ\Box A \to \circ(A \wedge \circ\Box A)$	(prop)(3)
(5)	$A \wedge \circ\Box A \to \Box A$	(ind)(1)(4)

(T15') $\circ A \wedge \circ B \to \circ(A \wedge B)$

(1)	$\circ(A \to \neg B) \to (\circ A \to \circ\neg B)$	(ltl2)
(2)	$\circ(A \to \neg B) \to (\circ A \to \neg\circ B)$	(prop)(ltl1)(1)
(3)	$\neg(\circ A \to \neg\circ B) \to \neg\circ(A \to \neg B)$	(prop)(2)
(4)	$\neg(\circ A \to \neg\circ B) \to \circ\neg(A \to \neg B)$	(prop)(ltl1)(3)
(5)	$\circ A \wedge \circ B \to \circ(A \wedge B)$	[(4) in anderer Schreibweise]