Ludwig-Maximilians-Universität München **SS 2001**
Institut für Informatik **Begleitblatt 5**
Dr. S. Merz

Temporale Logik

Vollständigkeit von Σ_{LTL}

Die Umkehrung von Satz 2.3.1, d.h. $\mathcal{F} \models A \implies \mathcal{F} \vdash A$ gilt i.a. nicht. Es gilt z.B.

$$\{A \to B, A \to \circ B, A \to \circ\circ B, \ldots\} \models A \to \Box B$$

aber es gilt nicht

$$\{A \to B, A \to \circ B, A \to \circ\circ B, \ldots\} \vdash A \to \Box B$$

denn eine Herleitung kann nur endlich viele Annahmen benutzen.

Im folgenden wird gezeigt, dass $\mathcal{F} \models A \implies \mathcal{F} \vdash A$ für endliches $\mathcal{F}$ gilt. Mit den Sätzen 2.3.3 und 2.3.4 ist dies äquivalent zur Aussage $\models A \implies \vdash A$ für alle Formeln A von $\mathcal{L}_{LTL}$.

Die Beweisstrategie besteht darin, zu jeder nicht beweisbaren Formel A eine temporale Struktur $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K}_0(A) =$ **f** anzugeben; insbesondere ist A dann nicht allgemeingültig. Ein wesentliches Charakteristikum der folgenden Konstruktionen ist, alle entstehenden Formelmengen endlich zu halten.

Definition. Ein *Positiv-Negativ-Paar* (PNP) ist ein Paar $\mathcal{P} = (\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-)$ zweier endlicher Mengen $\mathcal{F}^+$ und $\mathcal{F}^-$ von Formeln. Mit $plus(\mathcal{P})$ und $minus(\mathcal{P})$ bezeichnen wir die Formelmengen $\mathcal{F}^+$ und $\mathcal{F}^-$, $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ bezeichne die Formelmenge $\mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^-$, und für $\mathcal{F}^+ = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\mathcal{F}^- = \{B_1, \ldots, B_m\}$ bezeichne $\hat{\mathcal{P}}$ die Formel

$$\hat{\mathcal{P}} \equiv \begin{cases} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \ldots \wedge B_m & \text{falls } \mathcal{F}_\mathcal{P} \neq \emptyset \\ \textbf{true} & \text{sonst} \end{cases}$$

Das PNP $\mathcal{P}$ heißt *inkonsistent*, wenn $\vdash \neg\hat{\mathcal{P}}$. Andernfalls heißt $\mathcal{P}$ *konsistent*.

Lemma 2.4.1. Seien $\mathcal{P} = (\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-)$ ein konsistentes PNP und A eine Formel. Dann ist $(\mathcal{F}^+ \cup \{A\}, \mathcal{F}^-)$ oder $(\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^- \cup \{A\})$ konsistent.

Beweis. Angenommen, $(\mathcal{F}^+ \cup \{A\}, \mathcal{F}^-)$ und $(\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^- \cup \{A\})$ wären inkonsistent. Dann folgte

$$\vdash \neg(\hat{\mathcal{P}} \wedge A) \qquad \text{und} \qquad \vdash \neg(\hat{\mathcal{P}} \wedge \neg A)$$

und mit (prop) weiter $\vdash \neg\hat{\mathcal{P}}$. Also ist $\mathcal{P}$ inkonsistent. Q.E.D.

Definition. Zu einer Formel F definieren wir induktiv eine Menge $\tau(F)$ von Teilformeln:

1. $\tau(v) = \{v\}$ für $v \in \mathcal{V}$
2. $\tau(\textbf{false}) = \{\textbf{false}\}$
3. $\tau(A \to B) = \{A \to B\} \cup \tau(A) \cup \tau(B)$
4. $\tau(\circ A) = \{\circ A\}$
5. $\tau(\Box A) = \{\Box A\} \cup \tau(A)$

Für eine Formelmenge $\mathcal{F}$ definieren wir $\tau(\mathcal{F}) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \tau(F)$.

Offensichtlich gelten:

- $F \in \tau(F)$
- Falls $A \in \tau(F)$ und $B \in \tau(A)$, so ist $B \in \tau(F)$.

- $\tau(F)$ ist endlich für jede Formel F. Für jedes PNP $\mathcal{P}$ ist $\tau(\mathcal{F}_\mathcal{P})$ endlich.

Der erste Schritt im Vollständigkeitsbeweis besteht darin, einen systematischen Überblick darüber zu gewinnen, welche "Teilformeln" eines PNP $\mathcal{P}$ in einem Zustand "wahr" bzw. "falsch" werden sollen, damit in diesem Zustand $\hat{\mathcal{P}}$ "wahr" wird. Formal wird dies ausgedrückt durch den Begriff einer (konsistenten) Vervollständigung von $\mathcal{P}$.

Definition. Ein PNP $\mathcal{P}$ heißt vollständig, wenn gilt: $\tau(\mathcal{F}_\mathcal{P}) = \mathcal{F}_\mathcal{P}$.

Lemma 2.4.2. Sei $\mathcal{P} = (\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-)$ ein konsistentes und vollständiges PNP. Dann gilt:

(a) Falls $\vdash A \to B$, $A \in \mathcal{F}^+$ und $B \in \tau(\mathcal{F}_\mathcal{P})$, so ist $B \in \mathcal{F}^+$.

(b) Falls $A \to B \in \mathcal{F}^+$, so ist $A \in \mathcal{F}^-$ oder $B \in \mathcal{F}^+$.

(c) Falls $A \to B \in \mathcal{F}^-$, so ist $A \in \mathcal{F}^+$ und $B \in \mathcal{F}^-$.

Beweis.

(a) Da $\mathcal{P}$ vollständig und $B \in \tau(\mathcal{F}_\mathcal{P})$ ist, muss $B \in \mathcal{F}_\mathcal{P} = \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^-$ sein. Angenommen, $B \in \mathcal{F}^-$, dann folgte (wegen $A \in \mathcal{F}^+$) $\vdash \hat{\mathcal{P}} \to A \wedge \neg B$. Zusammen mit $\vdash A \to B$, also auch $\vdash \neg(A \wedge \neg B)$ (prop) folgte $\vdash \neg\hat{\mathcal{P}}$, im Widerspruch zur Konsistenz von $\mathcal{P}$. Also muss $B \in \mathcal{F}^+$ gelten.

(b) Aus $A \to B \in \mathcal{F}^+$ folgt mit der Vollständigkeit von $\mathcal{P}$ auch $A, B \in \tau(\mathcal{F}_\mathcal{P}) = \mathcal{F}_\mathcal{P}$. Wäre $A \notin \mathcal{F}^-$ und $B \notin \mathcal{F}^+$, folgte $A \in \mathcal{F}^+$ und $B \in \mathcal{F}^-$ und daher

$$\vdash \hat{\mathcal{P}} \to (A \to B) \wedge A \wedge \neg B$$

Aber dann folgte mit (prop) weiter $\vdash \neg\hat{\mathcal{P}}$, im Widerspruch zur Konsistenz von $\mathcal{P}$. Also muss $A \in \mathcal{F}^-$ oder $B \in \mathcal{F}^+$ gelten.

(c) ähnlich zu (b). Q.E.D.

Lemma 2.4.3. Zu jedem konsistenten PNP $\mathcal{P}$ gibt es ein konsistentes und vollständiges PNP $\mathcal{P}^*$ mit $plus(\mathcal{P}) \subseteq plus(\mathcal{P}^*)$, $minus(\mathcal{P}) \subseteq minus(\mathcal{P}^*)$ und $\mathcal{F}_{\mathcal{P}^*} = \tau(\mathcal{F}_\mathcal{P})$. Jedes solche PNP $\mathcal{P}^*$ heißt *Vervollständigung* von $\mathcal{P}$.

Beweis. Sei $\mathcal{P} = (\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-)$. Eine Vervollständigung $\mathcal{P}^*$ von $\mathcal{P}$ erhält man, indem sukzessive jede Formel $A \in \tau(\mathcal{F}_\mathcal{P})$ entweder zu $\mathcal{F}^+$ oder zu $\mathcal{F}^-$ hinzugenommen wird, je nachdem, welche dieser Erweiterungen konsistent ist (vgl. Lemma 2.4.1). Für jedes dabei entstehende PNP $\mathcal{P}'$ gilt $\tau(\mathcal{F}_{\mathcal{P}'}) = \tau(\mathcal{F}_\mathcal{P})$, und offenbar ist $\tau(\mathcal{F}_{\mathcal{P}^*}) = \mathcal{F}_{\mathcal{P}^*}$. Q.E.D.

Zu einem gegebenen PNP $\mathcal{P}$ gibt es i.a. mehrere verschiedene Vervollständigungen, aber nur endlich viele.

Lemma 2.4.4. Seien $\mathcal{P}_1^*, \ldots, \mathcal{P}_n^*$ alle verschiedenen Vervollständigungen eines konsistenten PNP $\mathcal{P}$. Dann gilt $\vdash \hat{\mathcal{P}} \to \hat{\mathcal{P}}_1^* \vee \ldots \vee \hat{\mathcal{P}}_n^*$

Beweis. Sei $\mathcal{P} = (\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-)$ konsistentes PNP, und seien $\mathcal{P}'_1, \ldots, \mathcal{P}'_m$ alle möglichen PNPe $\mathcal{P}'$ mit $\mathcal{F}_{\mathcal{P}'} = \tau(\mathcal{F}_\mathcal{P})$. Alle $\mathcal{P}'_i$ sind offenbar vollständig, und es gilt

$$\vdash \hat{\mathcal{P}}'_1 \vee \ldots \vee \hat{\mathcal{P}}'_m \tag{1}$$

Beweis: Induktion nach der Anzahl der Elemente von $\tau(\mathcal{F}_\mathcal{P})$:

- $\tau(\mathcal{F}_\mathcal{P}) = \emptyset$: Dann ist $\mathcal{P} = (\emptyset, \emptyset)$ und $\mathcal{P}'_1 = \mathcal{P}$. Damit ist $\hat{\mathcal{P}}'_1 =$ **true**, und die Behauptung gilt trivialerweise.
- $\tau(\mathcal{F}_\mathcal{P}) = \{A_1, \ldots, A_{k+1}\}$: Seien $\mathcal{P}''_1, \ldots, \mathcal{P}''_l$ alle PNPe $\mathcal{P}''$ mit $\mathcal{F}_{\mathcal{P}''} = \{A_2, \ldots, A_{k+1}\}$. Dann ist $m = 3 \cdot l$ und

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}'_1 = (plus(\mathcal{P}''_1) \cup \{A_1\}, minus(\mathcal{P}''_1)), \ldots, \mathcal{P}'_l = (plus(\mathcal{P}''_l) \cup \{A_1\}, minus(\mathcal{P}''_l)),\\
&\mathcal{P}'_{l+1} = (plus(\mathcal{P}''_1), minus(\mathcal{P}''_1) \cup \{A_1\}), \ldots, \mathcal{P}'_{2l} = (plus(\mathcal{P}''_l), minus(\mathcal{P}''_l) \cup \{A_1\}),\\
&\mathcal{P}'_{2l+1} = (plus(\mathcal{P}''_1) \cup \{A_1\}, minus(\mathcal{P}''_1) \cup \{A_1\}), \ldots, \mathcal{P}'_{3l} = (plus(\mathcal{P}''_l) \cup \{A_1\}, minus(\mathcal{P}''_l) \cup \{A_1\})
\end{aligned}$$

sind (bis auf Umnummerierung) genau die PNPe $\mathcal{P}'_i$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\vdash \hat{\mathcal{P}}''_1 \vee \ldots \vee \hat{\mathcal{P}}''_l$, und mit (prop) folgt

$$\vdash \underbrace{(\hat{\mathcal{P}}''_1 \wedge A_1) \vee \ldots \vee (\hat{\mathcal{P}}''_l \wedge A_1) \vee (\hat{\mathcal{P}}''_1 \wedge \neg A_1) \vee \ldots \vee (\hat{\mathcal{P}}''_l \wedge \neg A_1)}_{\mathcal{P}'_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}'_{2l}}$$

Daher gilt erst recht $\quad \vdash \mathcal{P}'_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}'_m$.

Die $\mathcal{P}^*_1, \ldots, \mathcal{P}^*_n$ sind diejenigen $\mathcal{P}'_i$, für die gilt: $\mathcal{P}'_i$ ist konsistent, $\mathcal{F}^+ \subseteq plus(\mathcal{P}'_i)$ und $\mathcal{F}^- \subseteq minus(\mathcal{P}'_i)$. O.B.d.A. seien dies gerade $\mathcal{P}'_1, \ldots, \mathcal{P}'_n$. Daher ist für $i > n$

(a) $\mathcal{P}'_i$ inkonsistent oder

(b) $\mathcal{F}^+ \cap minus(\mathcal{P}'_i) \neq \emptyset$ oder $\mathcal{F}^- \cap plus(\mathcal{P}'_i) \neq \emptyset$.

Im Fall (a) gilt $\vdash \neg\hat{\mathcal{P}}'_i$, im Fall (b) folgt $\vdash \neg(\hat{\mathcal{P}} \wedge \hat{\mathcal{P}}'_i)$ (taut).
In beiden Fällen folgt

$$\begin{array}{lll} & \vdash \hat{\mathcal{P}} \to \neg\hat{\mathcal{P}}'_i & \text{für alle } i > n \quad \text{(prop)} \\ \Longrightarrow & \vdash \hat{\mathcal{P}} \to \hat{\mathcal{P}}'_1 \vee \ldots \vee \hat{\mathcal{P}}'_n & \text{aus (1) und (prop)} \end{array}$$

Q.E.D.

Während im ersten Schritt nur die "Auswirkungen" auf den aktuellen Zustand betrachtet wurden (formal widergespiegelt in der Festlegung $\tau(\circ A) = \{\circ A\}$), wird im folgenden zweiten Schritt untersucht, welche Formeln im Folgezustand "wahr" bzw. "falsch" werden müssen.

Definition. Zu einem PNP $\mathcal{P} = (\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-)$ definieren wir das PNP $\sigma(\mathcal{P})$ wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1(\mathcal{P}) & = & \{A \mid \circ A \in \mathcal{F}^+\} \\ \sigma_2(\mathcal{P}) & = & \{\Box A \mid \Box A \in \mathcal{F}^+\} \\ \sigma_3(\mathcal{P}) & = & \{A \mid \circ A \in \mathcal{F}^-\} \\ \sigma_4(\mathcal{P}) & = & \{\Box A \mid \Box A \in \mathcal{F}^- \text{ und } A \in \mathcal{F}^+\} \\ \sigma(\mathcal{P}) & = & (\sigma_1(\mathcal{P}) \cup \sigma_2(\mathcal{P}), \sigma_3(\mathcal{P}) \cup \sigma_4(\mathcal{P})) \end{array}$$

Lemma 2.4.5. Sei $\mathcal{P}$ ein PNP. Dann gilt:

(a) $\vdash \hat{\mathcal{P}} \to \circ\widehat{\sigma(\mathcal{P})}$

(b) Ist $\mathcal{P}$ konsistent, so ist auch $\sigma(\mathcal{P})$ konsistent.

Beweis. Zum Beweis von Aussage (a) zeigen wir:

$$C \in \sigma_1(\mathcal{P}) \cup \sigma_2(\mathcal{P}) \Longrightarrow \vdash \hat{\mathcal{P}} \to \circ C \qquad \text{und} \qquad C \in \sigma_3(\mathcal{P}) \cup \sigma_4(\mathcal{P}) \Longrightarrow \vdash \hat{\mathcal{P}} \to \circ\neg C \tag{2}$$

Daraus folgt die Behauptung mit (prop) und (T15'). Die Beweise von (2) sind einfach, z.B.

$$\begin{array}{lll} & \Box A \in \sigma_4(\mathcal{P}) & \\ \Longrightarrow & \Box A \in \mathcal{F}^- \text{ und } A \in \mathcal{F}^+ & \\ \Longrightarrow & \vdash \hat{\mathcal{P}} \to A \wedge \neg\Box A & \text{(prop)} \\ \Longrightarrow & \vdash \hat{\mathcal{P}} \to \neg\circ\Box A & \text{(ltl3')} \\ \Longrightarrow & \vdash \hat{\mathcal{P}} \to \circ\neg\Box A & \text{(ltl1)(prop)} \end{array}$$

Die Aussage (b) folgt aus (a): Denn ist $\sigma(\mathcal{P})$ inkonsistent, so folgt $\vdash \neg\widehat{\sigma(\mathcal{P})}$, und mit (nex) und (ltl1) auch $\vdash \neg\circ\widehat{\sigma(\mathcal{P})}$. Aus Aussage (a) folgt $\vdash \neg\circ\widehat{\sigma(\mathcal{P})} \to \neg\hat{\mathcal{P}}$, und mit (mp) folgt $\vdash \neg\hat{\mathcal{P}}$, d.h. $\mathcal{P}$ ist inkonsistent. Q.E.D.

Intuitiv kann eine erfüllende Struktur zu einem konsistenten PNP $\mathcal{P}$ auf folgende Art konstruiert werden:

$$\mathcal{P}^* \;\rightsquigarrow\; \sigma(\mathcal{P}^*)^* \;\rightsquigarrow\; \sigma(\sigma(\mathcal{P}^*)^*)^* \;\rightsquigarrow\; \ldots$$

Das heißt, man bildet zunächst eine Vervollständigung $\mathcal{P}^*$ von $\mathcal{P}$ und liest daraus die im ersten Zustand der Struktur zu erfüllenden atomaren Aussagen ab. Anschließend geht man zu $\sigma(\mathcal{P}^*)$ über und wiederholt das Verfahren.

Allerdings bleibt noch folgendes Problem: Angenommen, es ist $\Box A$ in einer "$minus$"-Menge enthalten, d.h. $\Diamond\neg A$ soll dort "wahr" werden. Nun kann es sein, dass A in keiner der folgenden "$minus$"-Mengen enthalten ist, sondern nur immer A in den "$plus$"-Mengen und $\Box A$ in den "$minus$"-Mengen. In diesem Fall würde das skizzierte Verfahren kein Modell liefern. Daher müssen jeweils alle möglichen Vervollständigungen betrachtet werden und im entstehenden Baum ein "guter" Pfad ausgewählt werden. Im folgenden zeigen wir, dass so ein Pfad existiert, und dass die entsprechende temporale Struktur tatsächlich ein Modell des ursprünglichen PNP definiert.

Definition. Zu einem konsistenten und vollständigen PNP $\mathcal{P}$ definieren wir den Baum $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ wie folgt:

- Die Wurzel von $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ ist $\mathcal{P}$.
- Jeder Knoten K von $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ hat genau die Vervollständigungen von $\sigma(K)$ als Nachfolgeknoten.

Offenbar gilt: Jeder Knoten von $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ ist ein konsistentes und vollständiges PNP (vgl. Lemmata 2.4.3 und 2.4.5). Ist ferner K ein Knoten in $\mathsf{T}(\mathcal{P})$, so ist $\mathsf{T}(K)$ gerade der Unterbaum von $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ mit Wurzel K.

Lemma 2.4.6. Sei $\mathcal{P}$ ein konsistentes und vollständiges PNP. Dann gilt:

(a) $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ hat nur endlich viele verschiedene Knoten $K_1, \ldots, K_n$.

(b) $\vdash \hat{K}_1 \vee \ldots \vee \hat{K}_n \to \circ(\hat{K}_1 \vee \ldots \vee \hat{K}_n)$.

Beweis. Zum Beweis von (a) bemerken wir, dass zur Vervollständigung eines PNP $\mathcal{Q}$ nur Formeln aus der endlichen Menge $\tau(\mathcal{F}_\mathcal{Q})$ benutzt werden. Neue Formeln werden nur durch die Operation σ eingeführt, und zwar in den Fällen σ_1 und σ_3. Dabei verringert sich allerdings die Anzahl der Zeichen $\circ$, was nur endlich oft möglich ist. Dies zeigt: In den Knoten von $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ kommen insgesamt nur endlich viele verschiedene Formeln vor, also gibt es auch nur endlich viele verschiedene Knoten.

Zum Beweis von (b) erinnern wir zunächst an Lemma 2.4.5(a): Es gilt $\vdash \hat{K}_i \to \circ\widehat{\sigma(K_i)}$ für $i = 1, \ldots, n$. Sind $K'_{i_1}, \ldots, K'_{i_m}$ alle Vervollständigungen von $\sigma(K_i)$, so gilt nach Lemma 2.4.4

$$\vdash \widehat{\sigma(K_i)} \to \hat{K}'_{i_1} \vee \ldots \vee \hat{K}'_{i_m}$$

Ferner kommen alle K'_{i_j} unter den $K_1, \ldots, K_n$ vor, also gilt $\vdash \hat{K}'_{i_j} \to K_1 \vee \ldots \vee K_n$ nach (taut). Somit folgt mit (prop)

$$\vdash \widehat{\sigma(K_i)} \to \hat{K}_1 \vee \ldots \vee \hat{K}_n$$

und mit (nex) und (ltl2) weiter

$$\vdash \circ\widehat{\sigma(K_i)} \to \circ(\hat{K}_1 \vee \ldots \vee \hat{K}_n)$$

und somit $\vdash K_i \to \circ(\hat{K}_1 \vee \ldots \vee \hat{K}_n)$. Daraus folgt die Behauptung mit (prop). Q.E.D.

Das folgende Lemma sichert die korrekte "Übertragung von Information" im Baum $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ zu.

Lemma 2.4.7. Sei $\mathcal{P}$ ein konsistentes und vollständiges PNP, und sei $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots$ ein Pfad in $\mathsf{T}(\mathcal{P})$. Dann gilt für jedes $i \in \mathbb{N}_0$:

(a) $\circ A \in plus(\mathcal{P}_i) \Longrightarrow A \in plus(\mathcal{P}_{i+1})$

(b) $\circ A \in minus(\mathcal{P}_i) \Longrightarrow A \in minus(\mathcal{P}_{i+1})$

(c) $\Box A \in plus(\mathcal{P}_i) \Longrightarrow A \in plus(\mathcal{P}_j)$ für alle $j \geq i$

Beweis.

(a) $\circ A \in plus(\mathcal{P}_i) \Longrightarrow A \in plus(\sigma(\mathcal{P}_i)) \Longrightarrow A \in plus(\mathcal{P}_{i+1})$.

(b) genauso.

(c) Ist $\Box A \in plus(\mathcal{P}_i)$, so folgt $A \in \tau(\mathcal{P}_i)$. Mit $\vdash \Box A \to A$ (ltl3) und Lemma 2.4.2(a) folgt $A \in plus(\mathcal{P}_i)$. Außerdem ist $\Box A \in plus(\sigma(\mathcal{P}_i)) \subseteq plus(\mathcal{P}_{i+1})$. Induktiv folgt $A \in plus(\mathcal{P}_j)$ für alle $j \geq i$. Q.E.D.

Definition. Ein Pfad $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots$ in $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ heißt *vollständig*, wenn für alle Formeln A und alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Falls $\Box A \in minus(\mathcal{P}_i)$, so ist $A \in minus(\mathcal{P}_j)$ für ein $j \geq i$.

Lemma 2.4.8. Sei $\mathcal{P}$ ein konsistentes und vollständiges PNP. Es gibt einen vollständigen Pfad in $\mathsf{T}(\mathcal{P})$.

Beweis. Zunächst zeigen wir: Ist K Knoten von $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ und $\Box A \in minus(K)$, so enthält $\mathsf{T}(K)$ einen Knoten K' mit $A \in minus(K')$.

Denn angenommen, $A \notin minus(K')$ für alle Knoten K' in $\mathsf{T}(K)$. Wegen $A \in \tau(\Box A)$ ist $A \in plus(K)$, also $\Box A \in minus(K'')$ für alle Söhne K'' von K gemäß Konstruktion von σ. Induktiv folgt, dass $\Box A \in minus(K')$ und $A \in plus(K')$, und somit $\vdash \hat{K}' \to A$ gilt für alle $K' \in \mathsf{T}(K)$. Sind $K'_1, \ldots, K'_n$ alle Knoten von $\mathsf{T}(K)$, so ist also $\vdash \hat{K}'_1 \vee \ldots \vee \hat{K}'_n \to A$. Nach Lemma 2.4.6(b) gilt

$$\vdash \hat{K}'_1 \vee \ldots \vee \hat{K}'_n \to \circ(\hat{K}'_1 \vee \ldots \vee \hat{K}'_n)$$

Mit (ind) erhält man $\vdash \hat{K}'_1 \vee \ldots \vee \hat{K}'_n \to \Box A$. Nun ist $K \in \{K'_1, \ldots, K'_n\}$, also gilt auch $\vdash \hat{K} \to \hat{K}'_1 \vee \ldots \vee \hat{K}'_n$, und daraus folgt $\vdash \hat{K} \to \Box A$. Andererseits ist $\Box A \in minus(K)$ und daher $\vdash \hat{K} \to \neg\Box A$, zusammen also mit (prop) $\vdash \neg\hat{K}$, d.h. K ist inkonsistent — Widerspruch.

Nun konstruieren wir induktiv einen vollständigen Pfad ρ in $\mathsf{T}(\mathcal{P})$: Gemäß Lemma 2.4.6(a) enthält $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ nur endlich viele verschiedene Knoten, und damit kommen insbesondere nur endlich viele verschiedene Formeln $\Box A$ in Mengen $minus(K)$ für Knoten K in $\mathsf{T}(\mathcal{P})$ vor. Es sei $\{\Box A_1, \ldots, \Box A_m\}$ die Menge aller solcher Formeln. Wir definieren nun endliche, nichtleere Pfade $\rho_0, \rho_1, \ldots$, so dass ρ_i jeweils ein echtes Anfangsstück von ρ_{i+1} ist. Es sei $\rho_0 = \langle\mathcal{P}\rangle$ die einelementige Folge, die nur aus der Wurzel besteht. Induktiv sei ρ_i bereits konstruiert und K der letzte Knoten in ρ_i. Ist $\Box A_{(i \bmod m)+1} \notin minus(K)$ oder $A \in minus(K)$, so entstehe ρ_{i+1}, indem ein beliebiger Sohn von K an ρ_i angefügt wird. Ist dagegen $\Box A_{(i \bmod m)+1} \in minus(K)$ und $A \notin minus(K)$, so enthält nach obiger Hilfsbehauptung $\mathsf{T}(K)$ einen Knoten $K' \neq K$ mit $A \in minus(K)$. Der Pfad ρ_{i+1} entsteht durch Verlängerung von ρ_i um den Pfad von K zu K' in $\mathsf{T}(K)$. Die Folge $\rho_0, \rho_1, \ldots$ bestimmt eindeutig einen unendlichen Pfad ρ, und dieser ist nach Konstruktion offenbar vollständig. Q.E.D.

Lemma 2.4.8 ist der Schlüssel zum Beweis des Vollständigkeitssatzes.

Satz 2.4.9. Für jedes konsistente PNP $\mathcal{P}$ ist die Formel $\hat{\mathcal{P}}$ erfüllbar.

Beweis. Sei $\mathcal{P}$ konsistent, $\mathcal{P}^*$ Vervollständigung von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots$ ein (nach Lemma 2.4.8 existierender) vollständiger Pfad in $\mathsf{T}(\mathcal{P}^*)$. Die temporale Struktur $\mathbb{K} = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ sei definiert durch

$$\eta_i(v) = \mathbf{t} \iff v \in plus(\mathcal{P}_i) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{V},\ i \in \mathbb{N}_0$$

Dann gilt für jede Formel F und alle $i \in \mathbb{N}_0$:

$$F \in plus(\mathcal{P}_i) \Longrightarrow \mathbb{K}_i(F) = \mathbf{t} \qquad \text{und} \qquad F \in minus(\mathcal{P}_i) \Longrightarrow \mathbb{K}_i(F) = \mathbf{f} \tag{3}$$

Aus (3) folgt die Behauptung: Denn ist $\mathcal{P} = (\{A_1, \ldots, A_n\}, \{B_1, \ldots, B_m\})$, so gilt (wegen $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}^*$), dass $A_i \in plus(\mathcal{P}_0)$ und $B_j \in minus(\mathcal{P}_0)$, und mit (3) folgt

$$\mathbb{K}_0(\hat{\mathcal{P}}) = \mathbb{K}_0(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_m) = \mathbf{t}$$

Die Aussage (3) beweist man durch strukturelle Induktion nach dem Aufbau von F (simultan für alle $i \in \mathbb{N}_0$):

$F \equiv v \in \mathcal{V}$: folgt unmittelbar aus der Definition von η_i; es gilt $minus(\mathcal{P}_i) \cap plus(\mathcal{P}_i) = \emptyset$ wegen der Konsistenz von $\mathcal{P}_i$.

$F \equiv$ **false** : Wegen der Konsistenz von $\mathcal{P}_i$ ist **false** $\notin plus(\mathcal{P}_i)$, und es ist $\mathbb{K}_i($**false**$) = \mathbf{f}$.

$F \equiv A \to B$: Ist $A \to B \in plus(\mathcal{P}_i)$, so folgt $A \in minus(\mathcal{P}_i)$ oder $B \in plus(\mathcal{P}_i)$ mit Lemma 2.4.2(b). Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\mathbb{K}_i(A) = \mathbf{f}$ oder $\mathbb{K}_i(B) = \mathbf{t}$ und damit $\mathbb{K}_i(A \to B) = \mathbf{t}$.

Im Fall $A \to B \in minus(\mathcal{P}_i)$ argumentiert man ähnlich unter Verwendung von Lemma 2.4.2(c).

$F \equiv \bigcirc A$: Ist $\bigcirc A \in plus(\mathcal{P}_i)$, so folgt mit Lemma 2.4.7(a), dass $A \in plus(\mathcal{P}_{i+1})$, und nach Ind.vor. folgt $\mathbb{K}_{i+1}(A) = \mathbf{t}$, also auch $\mathbb{K}_i(F) = \mathbf{t}$.

Den Fall $\bigcirc A \in minus(\mathcal{P}_i)$ beweist man analog mit Lemma 2.4.7(b).

$F \equiv \Box A$: Ist $\Box A \in plus(\mathcal{P}_i)$, so folgt mit Lemma 2.4.7(c), dass $A \in plus(\mathcal{P}_j)$ für alle $j \geq i$. Die Ind.vor. ergibt $\mathbb{K}_j(A) = \mathbf{t}$ für alle $j \geq i$, also $\mathbb{K}_i(F) = \mathbf{t}$.

Ist $\Box A \in minus(\mathcal{P}_i)$, so gibt es nach Definition eines vollständigen Pfads ein $j \geq i$ mit $A \in minus(\mathcal{P}_j)$. Nach Ind.vor. folgt, dass $\mathbb{K}_j(A) = \mathbf{f}$ für ein $j \geq i$, also $\mathbb{K}_i(F) = \mathbf{f}$. Q.E.D.

Der Vollständigkeitssatz für Σ_{LTL} ergibt sich als einfache Folgerung:

Satz 2.4.10. Falls $\models A$, so $\vdash A$.

Beweis. Ist $\models A$, so ist $\neg A$ nicht erfüllbar (Satz 2.1.6), und daher ist gemäß Satz 2.4.9 das PNP $(\emptyset, \{A\})$ inkonsistent. Das bedeutet $\vdash \neg\neg A$, und mit (prop) folgt $\vdash A$. Q.E.D.

Folgerung 2.4.11. Für endliche Formelmengen $\mathcal{F}$ und Formeln A gilt: $\mathcal{F} \models A \Longrightarrow \mathcal{F} \vdash A$.

Beweis. Sei $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} & A_1, \ldots, A_n \models A & \\ \Longrightarrow & \models \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \rightarrow A & \text{(Satz 2.1.3)} \\ \Longrightarrow & \vdash \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \rightarrow A & \text{(Satz 2.4.10)} \\ \Longrightarrow & A_1, \ldots, A_n \vdash A & \text{(Satz 2.3.4)} \end{array}$$

Q.E.D.