Ludwig-Maximilians-Universität München **SS 2001**
Institut für Informatik **Begleitblatt 6**
Dr. S. Merz

Temporale Logik

Entscheidbarkeit von LTL

Definition.

- Ein *Positiv-Negativ-Paar* (PNP) ist ein Paar $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-)$ zweier endlicher Mengen $\mathcal{P}^+$ und $\mathcal{P}^-$ von Formeln. Für $\mathcal{P}^+ = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\mathcal{P}^- = \{B_1, \ldots, B_m\}$ bezeichne $\hat{\mathcal{P}}$ die Formel

$$\hat{\mathcal{P}} \equiv \begin{cases} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_m & \text{falls } \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^- \neq \emptyset \\ \textbf{true} & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ein *Tableau* $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ zu einem PNP $\mathcal{P}$ ist ein endlicher gerichteter Wurzelgraph von PNPen wie folgt:
  - die Wurzel von $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ ist $\mathcal{P}$ und
  - für alle Knoten $\mathcal{N} = (\mathcal{N}^+, \mathcal{N}^-)$ in $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ trifft eine der folgenden Bedingungen zu:

    ($\perp$) Es ist **false** $\in \mathcal{N}^+$ oder $\mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^- \neq \emptyset$, und der Knoten $\mathcal{N}$ hat keine Nachfolger.

    ($\rightarrow^+$) Es gibt zwei Formeln F und G mit $F \rightarrow G \in \mathcal{N}^+$, und der Knoten $\mathcal{N}$ hat genau die beiden Nachfolger $(\mathcal{N}^+ \setminus \{F \rightarrow G\}, \mathcal{N}^- \cup \{F\})$ und $((\mathcal{N}^+ \setminus \{F \rightarrow G\}) \cup \{G\}, \mathcal{N}^-)$.

    ($\rightarrow^-$) Es gibt zwei Formeln F und G mit $F \rightarrow G \in \mathcal{N}^-$, und der Knoten $\mathcal{N}$ hat genau den Nachfolger $(\mathcal{N}^+ \cup \{F\}, (\mathcal{N}^- \setminus \{F \rightarrow G\}) \cup \{G\})$.

    ($\Box^+$) Es ist $\Box F \in \mathcal{N}^+$, und $\mathcal{N}$ hat genau den Nachfolger $((\mathcal{N}^+ \setminus \{\Box F\}) \cup \{F, \circ\Box F\}, \mathcal{N}^-)$.

    ($\Box^-$) Es ist $\Box F \in \mathcal{N}^-$, und $\mathcal{N}$ hat genau die beiden Nachfolger $(\mathcal{N}^+, (\mathcal{N}^- \setminus \{\Box F\}) \cup \{F\})$ und $(\mathcal{N}^+, (\mathcal{N}^- \setminus \{\Box F\}) \cup \{\circ\Box F\})$.

    ($\circ$) Alle Formeln $F \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-$ sind von der Gestalt **false**, $v \in \mathcal{V}$ oder $\circ G$, und $\mathcal{N}$ hat genau den Nachfolger $(\{G \mid \circ G \in \mathcal{N}^+\}, \{G \mid \circ G \in \mathcal{N}^-\})$.

    Die Knoten $\mathcal{N}$, deren Nachfolger gemäß ($\circ$) gebildet wurden, heißen *Zustände ("states")* des Tableaus $\mathcal{T}(\mathcal{P})$.

Für die abgeleiteten logischen Operatoren ergeben sich entsprechend abgeleitete Tableauregeln (hier in Kurzschreibweise):

$$(\neg^+)\quad \frac{(\neg F)^+}{F^-} \qquad\qquad (\neg^-)\quad \frac{(\neg F)^-}{F^+}$$

$$(\wedge^+)\quad \frac{(F \wedge G)^+}{F^+, G^+} \qquad\qquad (\wedge^-)\quad \frac{(F \wedge G)^-}{F^- \qquad G^-}$$

$$(\vee^+)\quad \frac{(F \vee G)^+}{F^+ \qquad G^+} \qquad\qquad (\vee^-)\quad \frac{(F \vee G)^-}{F^-, G^-}$$

$$(\leftrightarrow^+)\quad \frac{(F \leftrightarrow G)^+}{F^+, G^+ \qquad F^-, G^-} \qquad\qquad (\leftrightarrow^-)\quad \frac{(F \leftrightarrow G)^-}{F^+, G^- \qquad F^-, G^+}$$

$$(\Diamond^+)\quad \frac{(\Diamond F)^+}{F^+ \qquad (\circ\Diamond F)^+} \qquad\qquad (\Diamond^-)\quad \frac{(\Diamond F)^-}{F^-, (\circ\Diamond F)^-}$$

Lemma 2.5.1. Für alle Knoten $\mathcal{N}$ im Tableau $\mathcal{T}(\mathcal{P})$, alle temporalen Strukturen $\mathbb{K}$ und alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(a) Trifft für $\mathcal{N}$ nicht die Bedingung $(\circ)$ zu, so ist $\mathbb{K}_i(\hat{\mathcal{N}}) = \mathbf{t}$ genau dann, wenn $\mathbb{K}_i(\hat{\mathcal{N}}') = \mathbf{t}$ für einen Nachfolger $\mathcal{N}'$ von $\mathcal{N}$ im Tableau.

(b) Trifft für $\mathcal{N}$ die Bedingung $(\circ)$ zu und ist $\mathbb{K}_i(\hat{\mathcal{N}}) = \mathbf{t}$, so auch $\mathbb{K}_{i+1}(\hat{\mathcal{N}}') = \mathbf{t}$ für den (eindeutigen) Nachfolger $\mathcal{N}'$ von $\mathcal{N}$ im Tableau.

Definition. Die Menge der *geschlossenen Knoten* im Tablau $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ wird induktiv wie folgt definiert:

(C1) Jeder Knoten $\mathcal{N}$, auf den die Bedingung $(\perp)$ zutrifft, ist geschlossen.

(C2) Sind alle Nachfolger von $\mathcal{N}$ im Tableau geschlossen, so ist auch $\mathcal{N}$ geschlossen.

(C3) Ist $\mathcal{N} = (\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-)$, $\Box F \in \mathcal{F}^-$, und enthält jeder Pfad von $\mathcal{N}$ zu einem Knoten $\mathcal{N}' = (\mathcal{G}^+, \mathcal{G}^-)$ mit $G \in \mathcal{G}^-$ einen geschlossenen Knoten, so ist $\mathcal{N}$ geschlossen.

Enthält das Tableau (abgeleitete) Formeln der Gestalt $\Diamond F \in \mathcal{F}^+$, so ist eine Bedingung analog zu (C3) zu beachten.

Zu einem (endlichen oder unendlichen) Pfad $\sigma = \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \ldots$ und $i \in \mathbb{N}_0$ führen wir folgende Schreibweisen ein:

- $\nu(i)$ bezeichnet die Anzahl der "states" im Anfangsstück $\mathcal{N}_0, \ldots, \mathcal{N}_{i-1}$ von σ.

  Offenbar ist $\nu(0) = 0$, und die Funktion ν ist monoton wachsend. Ist σ ein unendlicher Pfad, so ist die Funktion $\nu : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ surjektiv.

- $\lambda(i) \;=_{\text{def}}\; \max\{j \mid \nu(j) = i\}$ bezeichnet den Index des "state" $\mathcal{N}_j$ mit $\nu(j) = i$. (Diese Schreibweise wird nur verwendet, wenn σ unendlich ist.)

Definition. Zu einer temporalen Struktur $\mathbb{K}$ und einem Knoten $\mathcal{N}$ in $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ wird induktiv der (endliche oder unendliche) Pfad $\sigma(\mathbb{K}, \mathcal{N}) = \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \ldots$ definiert durch

- $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$
- Hat $\mathcal{N}_i$ keinen Nachfolger in $\mathcal{T}(\mathcal{P})$, so endet der Pfad mit $\mathcal{N}_i$.
- Hat $\mathcal{N}_i$ genau einen Nachfolger $\mathcal{N}'$ in $\mathcal{T}(\mathcal{P})$, so ist $\mathcal{N}_{i+1} = \mathcal{N}'$.
- Hat $\mathcal{N}_i$ zwei Nachfolger $\mathcal{N}'$ und $\mathcal{N}''$ gemäß $(\to^+)$ oder $(\Box^-)$, so ist $\mathcal{N}_{i+1} = \mathcal{N}'$, falls $\mathbb{K}_{\nu(i)} \models \hat{\mathcal{N}}'$, andernfalls ist $\mathcal{N}_{i+1} = \mathcal{N}''$. Im Fall $(\Box^-)$, angewandt auf $\Box F \in \mathcal{N}_i^-$, ist dabei der Knoten mit $F \in (\mathcal{N}')^-$ zu bevorzugen.

Lemma 2.5.2. Sei $\mathcal{N}$ ein Knoten in $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ und $\mathbb{K}$ eine temporale Struktur mit $\mathbb{K}_0(\hat{\mathcal{N}}) = \mathbf{t}$. Dann ist $\sigma(\mathbb{K}, \mathcal{N}) = \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \ldots$ unendlich und enthält keinen geschlossenen Knoten. Ferner gilt $\mathbb{K}_{\nu(i)}(\hat{\mathcal{N}}_i) = \mathbf{t}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Folgerung 2.5.3. Ist $\hat{\mathcal{P}}$ erfüllbar, so ist jedes Tableau $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ erfolgreich.

Ein Pfad $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \ldots$ in $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ heiße *vollständig*, wenn für alle Formeln A und alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Falls $\Box A \in \mathcal{N}_i^-$, so existiert ein $j \geq i$ mit $A \in \mathcal{N}_j^-$.

Lemma 2.5.4. Jedes erfolgreiche Tableau $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ enthält einen vollständigen Pfad.

Lemma 2.5.5. Ist $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ ein erfolgreiches Tableau, so ist $\hat{\mathcal{P}}$ erfüllbar.

Satz 2.5.6. Für jede Formel $F \in \mathcal{L}_{LTL}$ ist entscheidbar, ob F erfüllbar bzw. allgemeingültig ist.