Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Dr. S. Merz

SS 2001
Begleitblatt 7

Temporale Logik

Binäre temporale Operatoren

Semantik

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{K}_i(A\ \mathbf{until}\ B) = \mathbf{t} & \iff & \text{es gibt } j > i \text{ mit } \mathbb{K}_j(B) = \mathbf{t} \text{ und } \mathbb{K}_k(A) = \mathbf{t} \text{ für alle } k \text{ mit } i < k < j \\
\mathbb{K}_i(A\ \mathbf{unless}\ B) = \mathbf{t} & \iff & \text{es gibt } j > i \text{ mit } \mathbb{K}_j(B) = \mathbf{t} \text{ und } \mathbb{K}_k(A) = \mathbf{t} \text{ für alle } k \text{ mit } i < k < j \\
 & & \text{oder } \mathbb{K}_k(A) = \mathbf{t} \text{ für alle } k > i \\
\mathbb{K}_i(A\ \mathbf{atnext}\ B) = \mathbf{t} & \iff & \mathbb{K}_j(B) = \mathbf{f} \text{ für alle } j > i \\
 & & \text{oder } \mathbb{K}_k(A) = \mathbf{t} \text{ für das kleinste } k > i \text{ mit } \mathbb{K}_k(B) = \mathbf{t} \\
\mathbb{K}_i(A\ \mathbf{before}\ B) = \mathbf{t} & \iff & \text{für jedes } j > i \text{ mit } \mathbb{K}_j(B) = \mathbf{t} \text{ gibt es } k \text{ mit } i < k < j \text{ und } \mathbb{K}_k(A) = \mathbf{t}
\end{array}$$

Zusammenhänge zwischen den Operatoren

(T33) $A\ \mathbf{until}\ B \leftrightarrow (A\ \mathbf{unless}\ B) \wedge \circ\Diamond B$
(T34) $A\ \mathbf{unless}\ B \leftrightarrow (A\ \mathbf{until}\ B) \vee \circ\Box A$
(T35) $A\ \mathbf{unless}\ B \leftrightarrow B\ \mathbf{atnext}\ (A \rightarrow B)$
(T36) $A\ \mathbf{before}\ B \leftrightarrow \neg B\ \mathbf{atnext}\ (A \vee B)$
(T37) $A\ \mathbf{atnext}\ B \leftrightarrow \neg B\ \mathbf{unless}\ (A \wedge B)$
(T38) $A\ \mathbf{atnext}\ B \leftrightarrow B\ \mathbf{before}\ (\neg A \wedge B)$

Ausdrückbarkeit von $\circ$ und $\Box$

(T39) $\circ A \leftrightarrow A\ \mathbf{atnext}\ \mathbf{true}$
(T40) $\Box A \leftrightarrow A \wedge (\mathbf{false}\ \mathbf{atnext}\ \neg A)$

Fixpunkt-Charakterisierungen

(T41) $A\ \mathbf{until}\ B \leftrightarrow \circ B \vee \circ(A \wedge (A\ \mathbf{until}\ B))$
(T42) $A\ \mathbf{unless}\ B \leftrightarrow \circ B \vee \circ(A \wedge (A\ \mathbf{unless}\ B))$
(T43) $A\ \mathbf{atnext}\ B \leftrightarrow \circ(B \rightarrow A) \wedge \circ(\neg B \rightarrow (A\ \mathbf{atnext}\ B))$
(T44) $A\ \mathbf{before}\ B \leftrightarrow \circ\neg B \wedge \circ(A \vee (A\ \mathbf{before}\ B))$

Einige weitere Gesetze (für atnext)

(T45) $\Box A \rightarrow A\ \mathbf{atnext}\ B$
(T46) $\circ(A\ \mathbf{atnext}\ B) \leftrightarrow \circ A\ \mathbf{atnext}\ \circ B$
(T47) $(A \wedge B)\ \mathbf{atnext}\ C \leftrightarrow (A\ \mathbf{atnext}\ C) \wedge (B\ \mathbf{atnext}\ C)$
(T48) $(A \vee B)\ \mathbf{atnext}\ C \leftrightarrow (A\ \mathbf{atnext}\ C) \vee (B\ \mathbf{atnext}\ C)$
(T49) $A\ \mathbf{atnext}\ (B \vee C) \rightarrow (A\ \mathbf{atnext}\ C) \vee (B\ \mathbf{atnext}\ C)$
(T50) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (A\ \mathbf{atnext}\ C \rightarrow B\ \mathbf{atnext}\ C)$
(T51) $\Box A \rightarrow (B\ \mathbf{atnext}\ C \rightarrow (A \wedge B)\ \mathbf{atnext}\ (A \wedge C))$

Erweiterung des formalen Systems Σ_{LTL}

Bei Wahl von **atnext** als Grund-Operator:

(atn1) $\bigcirc\Box\neg B \;\rightarrow\; A$ **atnext** B
(atn2) A **atnext** $B \;\leftrightarrow\; \bigcirc(B \rightarrow A) \wedge \bigcirc(\neg B \rightarrow (A$ **atnext** $B))$

Bei Wahl von **until** als Grund-Operator:

(unt1) A **until** $B \;\rightarrow\; \bigcirc\Diamond B$
(unt2) A **until** $B \;\leftrightarrow\; \bigcirc B \vee \bigcirc(A \wedge (A$ **until** $B))$

Bei Wahl von **unless** als Grund-Operator:

(unl1) $\bigcirc\Box A \;\rightarrow\; A$ **unless** B
(unl2) A **unless** $B \;\leftrightarrow\; \bigcirc B \vee \bigcirc(A \wedge (A$ **unless** $B))$

Bei Wahl von **before** als Grund-Operator:

(bef1) $\bigcirc\Box\neg B \;\rightarrow\; A$ **before** B
(bef2) A **before** $B \;\leftrightarrow\; \bigcirc\neg B \wedge \bigcirc(A \vee (A$ **before** $B))$

Induktionsregeln

(indatnext) $A \rightarrow \bigcirc(C \rightarrow B) \wedge \bigcirc(\neg C \rightarrow A) \vdash A \rightarrow B$ **atnext** C
(indunless) $A \rightarrow \bigcirc C \vee \bigcirc(A \wedge B) \vdash A \rightarrow B$ **unless** C
(indbefore) $A \rightarrow \bigcirc\neg C \wedge \bigcirc(A \vee B) \vdash A \rightarrow B$ **before** C