Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Dr. S. Merz

SS 2001
Begleitblatt 8

Temporale Logik

Past-Operatoren

Semantik

$$
\begin{aligned}
\mathbb{K}_i(\ominus A) = \mathbf{t} &\iff \text{Falls } i > 0 \text{, so } \mathbb{K}_{i-1}(A) = \mathbf{t}\\
\mathbb{K}_i(\boxminus A) = \mathbf{t} &\iff \mathbb{K}_j(A) = \mathbf{t} \text{ für alle } j \le i
\end{aligned}
$$

Weitere Operatoren

$$
\begin{aligned}
\circledequal A &\equiv \neg \ominus \neg A\\
\diamondminus A &\equiv \neg \boxminus \neg A
\end{aligned}
$$

Einige allgemeingültige Formeln

(P1) $\circledequal A \rightarrow \neg \ominus \mathbf{false}$
(P2) $\circledequal \neg A \rightarrow \neg \circledequal A$
(P3) $A \rightarrow \ominus \bigcirc A$
(P4) $A \rightarrow \bigcirc \circledequal A$
(P5) $\ominus (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\ominus A \rightarrow \ominus B)$
(P6) $\ominus (A \wedge B) \leftrightarrow (\ominus A \wedge \ominus B)$
(P7) $\circledequal (A \wedge B) \leftrightarrow (\circledequal A \wedge \circledequal B)$

Erweiterung des formalen Systems Σ_{LTL}

(pltl1) $\circledequal \neg A \rightarrow \neg \circledequal A$
(pltl2) $\ominus (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\ominus A \rightarrow \ominus B)$
(pltl3) $\boxminus A \rightarrow A \wedge \ominus \boxminus A$
(pltl4) $\diamondminus \ominus \mathbf{false}$
(pltl5) $A \rightarrow \ominus \bigcirc A$
(pltl6) $A \rightarrow \bigcirc \circledequal A$
(prev) $A \vdash \ominus A$
(pind) $A \rightarrow B, A \rightarrow \ominus A \vdash A \rightarrow \boxminus B$

Zweistellige Past-Operatoren

$$
\begin{aligned}
\mathbb{K}_i(A \ \mathbf{atlast}\ B) = \mathbf{t} &\iff \mathbb{K}_j(B) = \mathbf{f} \text{ für alle } j < i\\
&\qquad \text{oder } \mathbb{K}_k(A) = \mathbf{t} \text{ für das größte } k < i \text{ mit } \mathbb{K}_k(B) = \mathbf{t}\\
\mathbb{K}_i(A \ \mathbf{since}\ B) = \mathbf{t} &\iff \text{es gibt } j < i \text{ mit } \mathbb{K}_j(B) = \mathbf{t} \text{ und } \mathbb{K}_k(A) = \mathbf{t} \text{ für alle } k \text{ mit } j < k < i\\
&\qquad \text{oder } \mathbb{K}_k(A) = \mathbf{t} \text{ für alle } k < i
\end{aligned}
$$

Zusammenhänge zwischen den Operatoren

$$
\begin{aligned}
\ominus A &\;\leftrightarrow\; A \textbf{ atlast true} \\
\boxminus A &\;\leftrightarrow\; A \wedge \textbf{false atlast } \neg A \\
A \textbf{ since } B &\;\leftrightarrow\; B \textbf{ atlast } (A \rightarrow B) \\
A \textbf{ atlast } B &\;\leftrightarrow\; \neg B \textbf{ since } (A \wedge B)
\end{aligned}
$$

Erweiterung der Axiomatisierung

(atl) $\quad A \textbf{ atlast } B \;\leftrightarrow\; \ominus (B \rightarrow A) \wedge \ominus (\neg B \rightarrow A \textbf{ atlast } B)$

Beispiel einer Herleitung

Herleitung von $\quad \ominus \boxminus \neg B \rightarrow A \textbf{ atlast } B$

(1)	$\neg(A \textbf{ atlast } B) \;\rightarrow\; \circleddash \neg(B \rightarrow A) \vee \circleddash \neg(\neg B \rightarrow A \textbf{ atlast } B)$	(atl)(prop)
(2)	$\neg(A \textbf{ atlast } B) \;\rightarrow\; \neg \ominus \textbf{false}$	(1)(P1)(prop)
(3)	$\neg(A \textbf{ atlast } B) \;\rightarrow\; (\circleddash B \wedge \circleddash \neg A) \vee (\circleddash \neg B \wedge \circleddash \neg(A \textbf{ atlast } B))$	(1)(P7)(prop)
(4)	$\boxminus \neg B \rightarrow \neg B \wedge \ominus \boxminus \neg B$	(pltl3)
(5)	$\ominus \boxminus \neg B \rightarrow \ominus \neg B \wedge \ominus \ominus \boxminus \neg B$	(4)(prev)(pltl2)(P6)
(6)	$\neg(A \textbf{ atlast } B) \wedge \ominus \boxminus \neg B \;\rightarrow\; \circleddash \neg(A \textbf{ atlast } B) \wedge \ominus \ominus \boxminus \neg B$	(prop)(3)(5)
(7)	$\neg(A \textbf{ atlast } B) \wedge \ominus \boxminus \neg B \;\rightarrow\; \ominus (\neg(A \textbf{ atlast } B) \wedge \ominus \boxminus \neg B)$	(6)(P6)(pltl1)(prop)
(8)	$\neg(A \textbf{ atlast } B) \wedge \ominus \boxminus \neg B \;\rightarrow\; \boxminus \neg \ominus \textbf{false}$	(pind)(2)(7)(prop)
(9)	$\ominus \Box \neg B \rightarrow A \textbf{ atlast } B$	(prop)(8)(pltl4)

Die Herleitung verwendet die nicht hergeleiteten Formeln (P1), (P6) und (P7).