Temporale Logik

Lineare temporale Prädikatenlogik

Temporale Signaturen

Eine *temporale Signatur* $TSIG = (SIG, \mathcal{X}^F, \mathcal{V}^F)$ ist gegeben durch:

- eine Signatur $SIG = (S, F, P)$,
- für jedes $s \in S$ eine höchstens abzählbar unendliche Menge $\mathcal{X}_s^F$ von *flexiblen Individuensymbolen*; es sei $\mathcal{X}^F = \bigcup_{s \in S} \mathcal{X}_s^F$,
- eine höchstens abzählbar unendliche Menge $\mathcal{V}^F$ von *flexiblen Aussagensymbolen*.

Für $TSIG = (SIG, \mathcal{X}^F, \mathcal{V}^F)$ sei SIG^+ die Signatur, die aus $SIG = (S, F, P)$ entsteht, wenn man $F^{(\varepsilon,\sigma)}$ durch $F^{(\varepsilon,\sigma)} \cup \mathcal{X}^F$ und $P^{(\varepsilon)}$ durch $P^{(\varepsilon)} \cup \mathcal{V}^F$ ersetzt.

Sprache

Sei $TSIG = (SIG, \mathcal{X}^F, \mathcal{V}^F)$ eine temporale Signatur und $\mathcal{L}_{PL}(SIG^+)$ eine prädikatenlogische Sprache 1. Stufe mit der Variablenmenge $\mathcal{X}$. Eine *(Basis-)Sprache* $\mathcal{L}_{PLTL}(TSIG)$ (kurz: $\mathcal{L}_{PLTL}$) der (linearen) temporalen Prädikatenlogik (1. Stufe) ist gegeben wie folgt:

Alphabet:

- alle Zeichen von $\mathcal{L}_{PL}(SIG^+)$,
- die Zeichen $\circ$ und $\Box$.

Terme und atomare Formeln: Terme und atomare Formeln von $\mathcal{L}_{PL}(SIG^+)$.

Formeln:

1. Jede atomare Formel ist eine Formel.
2. **false** ist eine Formel, und sind A und B Formeln, so sind $(A \rightarrow B)$, $\circ A$ und $\Box A$ Formeln.
3. Ist A eine Formel und $x \in \mathcal{X}$, so ist $\exists x\, A$ eine Formel.

Die Sprache $\mathcal{L}_{PL}(SIG^+)$ heißt *Kern* von $\mathcal{L}_{PLTL}(TSIG)$ und wird mit $kern(\mathcal{L}_{PLTL})$ bezeichnet. Die Formeln von $kern(\mathcal{L}_{PLTL})$ sind die Formeln von $\mathcal{L}_{PLTL}$, die keine temporalen Operatoren enthalten.

Semantik

Eine *temporale Struktur* $\mathbb{K} = (\mathbb{S}, \mathbb{W})$ für eine temporale Signatur $TSIG = (SIG, \mathcal{X}^F, \mathcal{V}^F)$ ist gegeben durch:

- eine Struktur $\mathbb{S}$ für SIG,
- eine unendliche Folge $\mathbb{W} = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots)$ von Abbildungen (*Zuständen*)

$$\eta_i : \begin{cases} \mathcal{X}^F \rightarrow |\mathbb{S}| & \text{(sortenkonform)} \\ \mathcal{V}^F \rightarrow \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\} & \end{cases}$$

Sei $\mathbb{K} = (\mathbb{S}, \mathbb{W})$ temporale Struktur für $TSIG$, ξ Variablenbelegung bzgl. $\mathbb{S}$ (also $\xi : \mathcal{X} \to |\mathbb{S}|$). Die Abbildung

$$\mathbb{S}^{(\xi,\eta_i)} : \begin{cases} \text{Menge der Terme} \to |\mathbb{S}| \\ \text{Menge der atomaren Formeln} \to \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\} \end{cases}$$

wird analog wie in Prädikatenlogik definiert, z.B.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{S}^{(\xi,\eta_i)}(x) = \xi(x) & \text{für } x \in \mathcal{X} \\ \mathbb{S}^{(\xi,\eta_i)}(a) = \eta_i(a) & \text{für } a \in \mathcal{X}^F \\ \mathbb{S}^{(\xi,\eta_i)}(v) = \eta_i(v) & \text{für } v \in \mathcal{V}^F \end{array}$$

Für atomare Formeln A definiert man $\mathbb{K}_i^{(\xi)}(A) = \mathbb{S}^{(\xi,\eta_i)}(A)$.

Die Abbildung $\mathbb{K}_i^{(\xi)}$ wird induktiv auf alle Formeln fortgesetzt wie in Prädikatenlogik bzw. temporaler Aussagenlogik, z.B.

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_i^{(\xi)}(A \to B) = \mathbf{t} &\iff \mathbb{K}_i^{(\xi)}(A) = \mathbf{f} \text{ oder } \mathbb{K}_i^{(\xi)}(B) = \mathbf{t} \\ \mathbb{K}_i^{(\xi)}(\circ A) &= \mathbb{K}_{i+1}^{(\xi)}(A) \\ \mathbb{K}_i^{(\xi)}(\exists x\, A) = \mathbf{t} &\iff \text{es gibt } \xi' \text{ mit } \xi' \sim_x \xi \text{ und } \mathbb{K}_i^{(\xi')}(A) = \mathbf{t} \end{aligned}$$

Definition. Eine Formel A (von $\mathcal{L}_{PLTL}(TSIG)$) heißt *gültig in der temporalen Struktur* $\mathbb{K}$ (in Zeichen: $\models_{\mathbb{K}} A$), wenn $\mathbb{K}_i^{(\xi)}(A) = \mathbf{t}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und alle ξ ist. A heißt *allgemeingültig* ($\models A$), wenn $\models_{\mathbb{K}} A$ für jedes $\mathbb{K}$. A *folgt aus* einer Formelmenge $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models A$ bzw. $B_1, \ldots, B_n \models A$), wenn $\models_{\mathbb{K}} A$ für jedes $\mathbb{K}$ gilt, für das $\models_{\mathbb{K}} B$ für alle $B \in \mathcal{F}$ gilt.

Definition. Ein Term t heißt *einsetzbar für x in A*, wenn $A_x(t)$ gegenüber A keine neuen Vorkommen flexibler Individuensymbole im "Gültigkeitsbereich" eines temporalen Operators hat.

Das formale System Σ_{PLTL}

Axiome: alle Axiome von Σ_{LTL} sowie zusätzlich

(ltl4) $A_x(t) \to \exists x\, A$ falls t für x in A einsetzbar ist
(ltl5) $\circ\exists x\, A \to \exists x\, \circ A$
(ltl6) $A \to \circ A$ falls A keine flexiblen Symbole enthält
(eq1) $x = x$
(eq2) $x = y \to (A \to A_x(y))$ falls A Formel von $kern(\mathcal{L}_{PLTL})$ ist

Regeln: alle Regeln von Σ_{LTL} sowie zusätzlich

(par) $A \to B \vdash (\exists x\, A) \to B$ falls x in B nicht frei vorkommt

Weitere temporallogische Gesetze

(T54) $\exists x\, \circ A \leftrightarrow \circ\exists x\, A$
(T55) $\forall x\, \circ A \leftrightarrow \circ\forall x\, A$
(T56) $\exists x\, \Diamond A \leftrightarrow \Diamond\exists x\, A$
(T57) $\forall x\, \Box A \leftrightarrow \Box\forall x\, A$

Beispiel einer Herleitung: (T56)

(1)	$\Diamond A \rightarrow \exists x \, \Diamond A$	(ltl4)
(2)	$\neg \exists x \, \Diamond A \rightarrow \neg \Diamond A$	(prop)(1)
(3)	$\forall x \, \Box \neg A \rightarrow \Box \neg A$	(prop)(2)
(4)	$\Box \neg A \rightarrow \bigcirc \Box \neg A$	(prop)(ltl3)
(5)	$\forall x \, \Box \neg A \rightarrow \bigcirc \Box \neg A$	(prop)(3)(4)
(6)	$\forall x \, \Box \neg A \rightarrow \forall x \, \bigcirc \Box \neg A$	(pred)(5)
(7)	$\bigcirc \exists x \, \Diamond A \rightarrow \exists x \, \bigcirc \Diamond A$	(ltl5)
(8)	$\forall x \, \bigcirc \Box \neg A \rightarrow \bigcirc \forall x \, \Box \neg A$	(prop)(7)(ltl1)
(9)	$\forall x \, \Box \neg A \rightarrow \bigcirc \forall x \, \Box \neg A$	(prop)(6)(8)
(10)	$\forall x \, \Box \neg A \rightarrow \neg A$	(prop)(ltl3)(3)
(11)	$\forall x \, \Box \neg A \rightarrow \forall x \, \neg A$	(pred)(10)
(12)	$\forall x \, \Box \neg A \rightarrow \Box \forall x \, \neg A$	(ind)(9)(11)
(13)	$\Diamond \exists x \, A \rightarrow \exists x \, \Diamond A$	(prop)(12)
(14)	$A \rightarrow \exists x \, A$	(ltl4)
(15)	$\Diamond A \rightarrow \Diamond \exists x \, A$	(T26)(14)
(16)	$\exists x \, \Diamond A \rightarrow \Diamond \exists x \, A$	(par)(15)
(17)	$\exists x \, \Diamond A \leftrightarrow \Diamond \exists x \, A$	(prop)(13)(16)

Weitere temporallogische Gesetze (mit atnext)

(T58) $\exists x \, (A$ **atnext** $B) \leftrightarrow (\exists x \, A)$ **atnext** B falls x in B nicht frei vorkommt
(T59) $\forall x \, (A$ **atnext** $B) \leftrightarrow (\forall x \, A)$ **atnext** B falls x in B nicht frei vorkommt