Bäume

Martin Wirsing

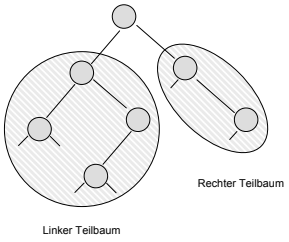
in Zusammenarbeit mit
Matthias Hölzl, Piotr Kosiuczenko, Dirk Pattinson

Ziele

- Standardimplementierungen für Bäume kennenlernen
- Das Composite-Muster kennenlernen

Bäume - 2-dimensionale Listen

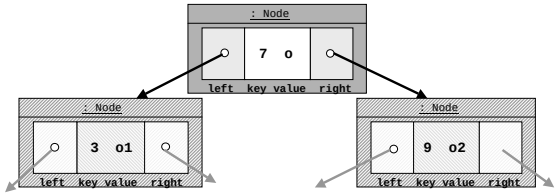
- Bäume sind hierarchische Strukturen
- Bäume bestehen aus
  - Knoten und
  - Teilbäumen
- Bei *Binärbäumen* hat jeder Knoten zwei Unterbäume:
  - den linken Unterbaum
  - den rechten Unterbaum
- In den Knoten kann Information gespeichert werden



Baumknoten

```
class Node
{  Node left;
   int key; Object value
   Node right; …
}
```

- Wir implementieren einen Knoten als Objekt mit zwei Zeigern.
- Wir speichern **einen Schlüssel und ein Objekt** in den Knoten.



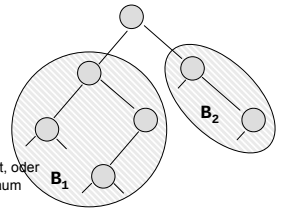
BinTree

- Die Klasse `Node` ist nur eine Hilfsklasse für die Klasse `BinTree`

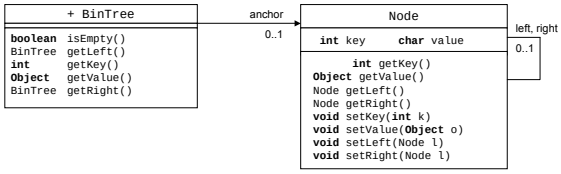
```
public class BinTree
{      Node anchor;  . . .
}
class Node
{      Node left;
       int key; Object value;
       Node right;

       // Konstruktor
       Node(Node b1, int k, Object o, Node b2)
       {  left = b1; key = k; value = o; right = b2;
       }
  . . .
}
```


Operationen auf BinTree

- Konstruktoren
  - `BinTree()`
    - der leere Baum
  - `BinTree(`B_1`, k, o `B_2`)` neuer `BinTree` mit
    - linkem Teilbaum B_1
    - rechtem Teilbaum B_2
    - Inhalt der Wurzel: `k,o`
- Prädikat `isEmpty`
  - Testen, ob ein `BinTree` leer ist, oder einen rechten und linken Teilbaum enthält
- Selektoren **`getLeft, getRight, getKey`**
  - Falls der BinTree nicht leer ist, liefert
    - `getLeft()` den linken Teilbaum
    - `getRight()` den rechten Teilbaum
    - `getKey()` den Inhalt der Wurzel



BinTree in UML



Implementierung in Java

Die Implementierung von BinTree verläuft analog zu Listen:

- `BinTree` repräsentiert Binärbäume über einem Integer-Schlüssel und Werten vom Typ `Object`.
  - `BinTree` selbst speichert nur einen Verweis auf die Wurzel des Baumes.
  - Die eigentliche Funktionalität wird von der Klasse `Node` realisiert;

- Um Funktionen auf `BinTree` zu definieren, verwenden wir folgende Fallunterscheidung:
  - leerer Baum: Berechnung des Resultats direkt in `BinTree`
  - nicht-leerer Baum: Weitergeben der Funktion an `Node`

Implementierung BinTree: isEmpty & Zugriff auf linken Teilbaum

- Implementierung verläuft analog zu Listen

```
public class BinTree
{       private Node anchor;

        BinTree(){};   // der leere Baum
        BinTree(BinTree b1, int k, Object o, BinTree b2)
        {       anchor = new Node(b1.anchor, k, o, b2.anchor);
        }

        boolean isEmpty(){return anchor==null;}

        BinTree getLeft() throws NoSuchElementException
        {       if (anchor == null) throw new NoSuchElementException();
                else
                {   BinTree l = new BinTree();
                    l.anchor = anchor.getLeft();
                    return l;
                }
        }
. . .
```


Implementierung BinTree: Summe der Knoten

```
        int sumNodes()
        {       if (anchor == null) return 0;
                else return anchor.sumNodes();
        }
where

class Node
{ . . .
        int sumNodes()
        {       int suml = 0, sumr = 0;
                if (left != null) suml = left.sumNodes();
                if (right != null) sumr = right.sumNodes();
                return 1 + suml + sumr;
        }
  . . .
```

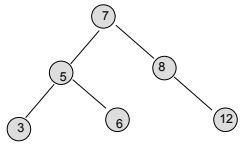

Geordnete Binärbäume

- Ein Binärbaum b heißt geordnet, wenn folgendes für alle nichtleeren Teilbäume t von b gilt:

  Der Schlüssel von t ist
  - größer (oder gleich) als alle Schlüssel des linken Teilbaums von t und
  - kleiner (oder gleich) als alle Schlüssel des rechten Teilbaums von t

- Beispiel: Geordnet sind:

  Der leere Baum und der Baum:



Suche im geordneten Binärbaum

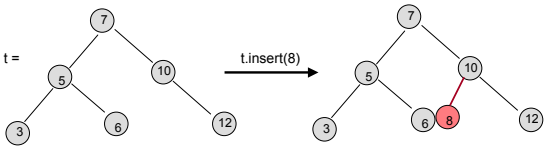
```
public Object find(int key)
  { if (anchor == null) return null;
    else return anchor.find(key);
  }
wobei

class Node
{ . . .
    Object find(int key)
    {  Node current = this;
       while(current.key != key)        // solange nicht gefunden,
       { if(key < current.key)          // gehe nach links?
            current = current.left;
         else                           // oder gehe nach rechts?
            current = current.right;
         if(current == null) return null; //nicht gefunden!
       }
       return current.value;         //gefunden; gib value zurück
    }
```

Gibt `value` zurück, wenn `key` im Baum; sonst wird `null` zurückgegeben

Einfügen in geordneten Binärbaum

- Beim Einfügen in einen geordneten Binärbaum wird rekursiv die "richtige" Stelle gesucht, so daß wieder eine geordneter Binärbaum entsteht.

- Beispiel: t.insert(8) ergibt:



Einfügen in geordneten Binärbaum

Fügt einen neuen Knoten mit Schlüssel id an der richtigen Stelle im geordneten Baum ein

```
public void insert(int id, Object o)
{   if(anchor==null)                    // falls kein Knoten im anchor
       anchor = new Node(null,id,o,null);    // neuer Knoten
    else  anchor = anchor.insertKeyObj(id, o);
}

Wobei in class Node:
```


Einfügen in geordneten Binärbaum

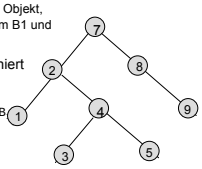
Fügt einen neuen Knoten passend ein
Achtung: id darf nicht im Baum vorkommen!

```
Node insertKeyObj(int id, Object o)
{    Node current = this;       // starte bei this
     Node parent;
     while(true)                // terminiert intern
     {   parent = current;
         if(id < current.key)  // gehe nach links?
         {  current = current.left;
            if(current == null)  // am Ende füge links ein
            {   parent.left = new Node(null, id, o, null);
                return this;
            }
         }  // end if go left
         else             // falls id > current.key, gehe nach rechts
         {  current = current.right;
            if(current == null)  // am Ende füge rechts ein
            {   parent.right = new Node(null, id, o, null);
                return this;
            }
         }  // end else gehe nach rechts
     }  // end while
}
```


Rekursion auf Binärbäumen

- Binärbäume sind induktiv definiert
  - Der Leere Baum ist ein Binärbaum
  - Sind B_1 und B_2 Binärbäume, id ein Schlüssel und o ein Objekt, dann ist der Baum mit Wurzel id und o, linkem Teilbaum B1 und rechtem Teilbaum B_2 ein Binärbaum

BinTree(B_1, k,o, B_2)



- Operationen f auf Binärbäumen können rekursiv definiert werden (vgl. SML)
  - Falls `isEmpty(B)`: gibt `f(B)` direkt an
  - Ansonsten beschreibe wie sich der Wert von `f` aus `f(B1)` `f(B2)` und `id,o` ergibt.
- Beispiel: sumNodes1
  - Falls `isEmpty(B): 0`
  - Ansonsten `getLeft().sumNodes1()+getRight().sumNodes1()+1`

sumNodes: 8

- Beispiel: exist(int k) (ist k vorhanden ?)
  - Falls `isEmpty(B) : false`
  - Ansonsten: `getLeft().exists(k) || getKey()==k ||getRight().exists(k)`

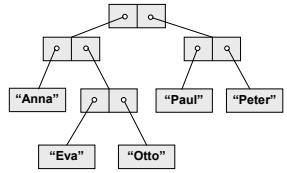
Einfache Baumoperationen

```
public class XBinTree extends BinTree
{
   public int sumNodes()
   {   if(isEmpty()) return 0;
       else return
           ((XBinTree)getLeft()).sumNodes() +
           ((XBinTree)getRight()).sumNodes() +1;
   }

   public boolean exists(int k)
   {       if(isEmpty()) return false;
           else return
                ((XBinTree)getLeft()).exists(k)
                || getKey()==k
                || ((XBinTree)getRight()).exists(k);
   }
```

- `isEmpty(), left(), right()` werden aus der Oberklasse geerbt
- `left()` liefert einen `BinTree`
- `sumNodes()` ist nur in der Unterklasse definiert - für `XBinTrees`
- Wir brauchen casts um die `BinTrees` in `XBinTrees` zu verwandeln

Bäume mit Blättern

- Jeder Zweig soll in einem Blatt enden
- Die Information speichern wir in Blättern
- Jeder Knoten hat zwei Unterbäume




```
class Knoten
{       Knoten links;
        Knoten rechts;
}
```

```
class Blatt
{       String value;
}
```

Wir haben ein Problem: Wir müssen auch zulassen:

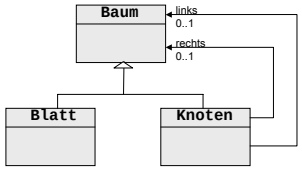
```
Blatt links;
Blatt rechts;
```

... aber ein Blatt ist kein Knoten!

Baum in UML

- Wir wollen Blatt und Knoten zu einer Klasse Baum zusammenfassen.
- Blatt wird Unterklasse von Baum
- Knoten wird Unterklasse von Baum
- Viele Methoden müssen für alle Bäume funktionieren
  - istBlatt()
  - istKnoten
  - sumNodes()
  - toString()

```
class Blatt extends Baum

class Knoten extends Baum
```



Default-Methoden redefinieren

- In Baum definieren wir die Methoden irgendwie:

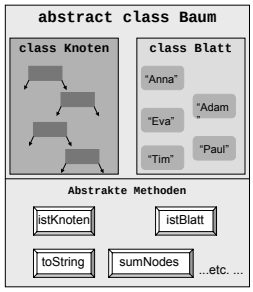
```
boolean isBlatt(){
{   return false;    // äähm na ja...
}
void toString(){}          // tu nix
```

- In den Unterklassen redefinieren wir sie wieder

```
// z.B. In Blatt:
boolean isBlatt ()
{   return true;
}
void toString()
{   System.out.println(info);
}
```


Besser: Abstrakte Klassen

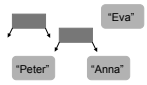
- Vereinigung von Unterklassen
- Gemeinsame Methoden
  - In der Oberklasse abstrakt erklärt
    - Nur die Signatur wird aufgeführt
  - In jeder nicht abstrakten Unterklasse implementiert
- Beispiel
  - Jedes Blatt ist ein Baum
  - Jeder Knoten ist ein Baum
  - Definiere Baum als abstrakte Klasse, die Blatt und Knoten umfasst



Abstrakte Klasse Baum

- Klassen werden wechselseitig rekursiv, vgl. die Implementierung von Bäumen in SML.

```
abstract class Baum
{   ...
}
```



Jeder Knoten ist ein Baum

```
class Knoten extends Baum
{  Baum links;
   Baum rechts;
      ...
}
```

Jedes Blatt ist ein Baum

```
class Blatt extends Baum
{   String value;
}
```

Implementierung

- Abstrakte Methoden müssen in (konkreten) Unterklassen implementiert werden
- Wird vom Computer geprüft

```
abstract class Baum{
   abstract boolean istBlatt();
   abstract int sumNodes();
      ...
}
```

```
class Knoten extends Baum{
   Baum links, rechts ;
   boolean istBlatt()
   {   return false;}
   int sumNodes(){
   {   return
          1+links.sumNodes()
          +rechts.sumNodes();
   }
}
```

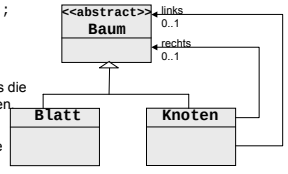
```
class Blatt extends Baum
{   String value;
   boolean istBlatt(){
   {   return true;}
   int sumNodes()
   { return 0; }
}
```


Abstrakte Klassen

- Haben **keine** eigenen Objekte
  - Was sollte auch new Baum() liefern:
  - ein Blatt oder einen Knoten?
- Können abstrakte und konkrete Methoden enthalten:

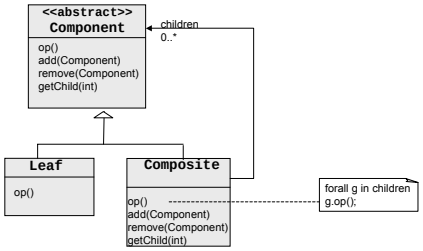
```
abstract boolean istBlatt();

boolean istKnoten()

{return !istBlatt(); }
```

- Sobald eine Methode abstrakt ist, muss die ganze Klasse als abstrakt erklärt werden
- Der Compiler achtet darauf, dass jede abstrakte Methode in jeder Unterklasse implementiert wird.



Das Composite-Muster

- Das Composite-Muster dient zum Entwurf allgemeiner Baumstrukturen; es verallgemeinert das Muster für Binärbaume.



Das Composite-Muster

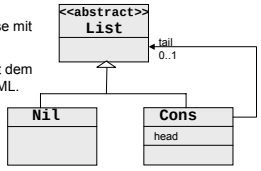
Das Composite-Muster wird verwendet zur Implementierung von Objekthierarchien wie etwa hierarchischen Benutzeroberflächen, verschachtelten Diagrammen oder Parsebäumen in Übersetzern.

- Component

  Bildet die Schnittstelle und implementiert das Standardverhalten für alle Klassen des Musters.
- Leaf
  - repräsentiert die Blattobjekte. Ein Blatt hat keine Kinder.
  - Definiert das Verhalten der primitiven Objekte.
- Composite
  - Definiert das Verhalten für Komponenten mit Kindern
  - Speichert die Kindkomponenten

Listen als Abstrakte Klassen

- Listen sind leer oder nicht leer
  - Nichtleere Listen haben `head` und `tail`
  - Eine leere Liste hat **kein** Attribut
- Traditionell (in Lisp) heißt der Konstruktor einer nichtleeren Liste `cons`, die leere Liste heißt `nil`
- Wir definieren `List` als abstrakte Klasse mit Unterklassen `Cons` und `Nil`.
- Diese Listenimplementierung entspricht dem Ansatz rekursiver Datenstrukturen in SML.



Implementierung

- Abstrakte Methoden müssen in (konkreten) Unterklassen implementiert werden
- Wird vom Computer geprüft

```
abstract class List
{  abstract boolean isEmpty();
   abstract int length();
   abstract List addFirst();
      ...                    }
```

```
class Cons extends List
{ Object value; List tail;
  boolean isEmpty(){return false;}
  Cons(Object o, List l)
  { value = o; tail = l; }
  Object head() throws NoSuchElExc
  {  return value; }
  List tail() throws NoSuchElExc
  {  return tail; }
  int length()
  {  return 1+tail.length();
  }
  . . .
}
```

```
class Nil extends List
{ Nil(){}
  boolean isEmpty(){return false;}
  int length()
  {  return 0;
  }
  . . .
}
```


Zusammenfassung

- Binäre Bäume werden in Java implementiert:
  - als Verallgemeinerung der einfach verketteten Listen mit zwei Nachfolgerverweisen oder
  - durch eine abstrakte Oberklasse und zwei Unterklassen, einer Blatt- und eine Knotenklasse
- Eine Operation auf binären Bäume mit Knoten wird definiert:
  - durch Weitergeben der Operation an die Knotenklasse oder
  - durch Fallunterscheidung bzgl. des leeren Baums und rekursiven Aufruf der Selektoren getLeft() und getRight() von BinTree.
- Eine Operation auf beblätterten binären Bäume werden definiert:

  durch Definition der Operation in beiden Unterklassen.

Zusammenfassung

- Das Composite-Muster dient zur Beschreibung hierarchischer Objektstrukturen; es verallgemeinert die zweite Implementierung binärer Bäume auf Bäume mit endlich vielen Kindbäumen.
- Spezialisierung des Composite-Musters ergibt eine weitere rekursive Implementierung für Listen.