Operationalisierung

“Eigenschaft x gilt für Diagramm y” $:\Longleftrightarrow [\![y]\!] \models [\![x]\!]$

Was wird also allgemein benötigt?

1. Ein gutes Verständnis der informellen Beziehungen und Domänen
2. Die formalen Domänen
3. Die formalen Abbildungen

(4. Werkzeuge, um große Beispiele zu überprüfen)

Signale, Worte, Sprachen (1)

Sei Σ eine allgemein/jeweils zugrundegelegte Mengen von **Signalen**.

Folgen von Signalen werden **Worte** genannt. Signale und Wort können duch Hintereinanderschreiben konkateniert werden.

Eine Menge von Worten heißt **Sprache**.

Der transitive Abschluß von Σ ist definiert als $\Sigma^* := \lambda \cup \Sigma\Sigma^*$.

Jede Teilmenge von Σ^* heißt **endliche Sprache**.

Signale, Worte, Sprachen (2)

Die kleinste Limeszahl (transfinite Ordinalzahl) heißt ω.

Informell gesprochen ist ω die erste Zahl nach den natürlichen Zahlen.

Unendliche Folgen von Signalen werden durch Σ^ω notiert.

Jede Teilmenge von Σ^ω heißt **unendliche Sprache**.

Signale, Worte, Sprachen (3)

Das leere Wort heiße λ. Die Länge eines Wortes w (geschrieben $|w|$), ist die Anzahl der Signale in w:

$$|w| := \begin{cases} 0 & \text{falls } w = \lambda \\ 1 + |v| & \text{falls } w = xv \text{ und } x \in \Sigma, v \in \Sigma^* \\ \omega & \text{falls } w \in \Sigma^\omega \end{cases}$$

Das i-te Element aus w (geschrieben: w_i, $i > 0$) ist definiert als:

$$w_i := \begin{cases} x & \text{falls } i = 1 \text{ und } w = xv \\ v_{i-1} & \text{falls } i > 1 \text{ und } w = xv \end{cases}$$

Signale, Worte, Sprachen (3)

Sei $f: A \to B$ eine Funktion auf Elementen von A, dann ist $f^*: A^* \to B^*$ die kanonische Erweiterung von f auf Folgen von Elementen von A, nach folgender Definition:

$$f^*(w) := \begin{cases} \lambda & \text{falls } w = \lambda \\ f(a)f^*(v) & \text{falls } w = av \end{cases}$$

Transitionssysteme

Ein Tripel $\langle Q, \Sigma, \rightarrow\rangle$ heißt **Ettiketiertes Transisions-system (ETS)**, gdw.

Q: Menge der Zustände;

$\rightarrow \subseteq Q \times \Sigma \times Q$: (Zustands-)Übergangsrelation;

Schreibweise: $q \rightarrow q' \Longleftrightarrow \exists\sigma \in \Sigma : q \xrightarrow{\sigma} q'$

Beispiel: $\langle \mathbb{N}, \{succ\}, \{\langle i, succ, i + 1\rangle \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle$

Beachte: es darf unverbundene Zustände geben ("Müllzustände") das macht uns aber nichts.
Beispiel: $\langle \mathbb{Z}, \{succ\}, \{\langle i, succ, i + 1\rangle \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle$

Abläufe

Ein (endlicher) Ablauf (run) ist ein (endliches) Wort r über $\longrightarrow$, so daß:

$$\forall x, y : r = r_1 x y r_2 x, y \in \delta \wedge x_3 = y_1$$

Also $R^* \subseteq \longrightarrow^*$ für die endlichen Abläufe,
und $R^\omega \subseteq \longrightarrow^\omega$ für die unendlichen Abläufe.

Varianten von Abläufen

initialer Ablauf: $(r_1)_1 = q_0$

maximaler Ablauf: $|r| = \omega$ oder $\neg \exists x \in \delta$: $(r_{|r|})_3 = x_1$

terminaler endlicher Ablauf: initial und $(r_{|w|})_3 = q_e$

terminaler unendlicher Ablauf: initial und $\exists I \subseteq \mathbb{N}$: $(\forall_{i \in I} : r_i = q_e) \wedge |I| = |\mathbb{N}|$

Eigenschaften von Abläufen

Sei w ein endlicher Ablauf von $M = \langle Q, \Sigma, \stackrel{,}{\rightarrow} q_0, q_e \rangle$.

Wenn w endlich und maximal ist, dann heißt $q = (w_{|w|})_3$

Verklemmung (sofern nicht $q = q_e$),

und w **verklemmend**.

Wenn w unendlich aber nicht terminal ist,

heißt w **divergent**.

M heißt **terminierend**, wenn alle $w \in R_M(q_0)$ terminal sind. Gilt zusätzlich $q_e = q_0$, dann heißt M **sicher**.

Sprache eines Ablaufes

Gegeben: ein verwurzeltes terminales ETS M. Definiere die endliche (unendliche) Sprache von M (geschrieben: $\mathcal{L}_M^x$) wie folgt:

$$\mathcal{L}_M^x = \{w \in \Sigma^x \,|\, r \in R_M^x\}$$

wobei $x = *$ oder $x = \omega$.

In Analogie zur klassischen Automatentheorie definert man: die Semantik eines ETS ist die Menge seiner Worte, also seine Sprache.

Äquivalenz auf ETS (1)

Wann sind zwei ETS “gleich”? Wenn ihre Bedeutung, also ihre Sprachen gleich sind.

Zwei ETS M und M' sind gleich, gdw:

$$M \stackrel{\mathcal{L}}{=} M' :\Longleftrightarrow \mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M').$$

Später werden noch andere Gleichheiten dazukommen, daher führen wir jetzt schon die Annotation $\mathcal{L}$ für das Gleichheitssymbol ein.

$\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ ist eine Äquivalenz.

Äquivalenz auf ETS (2)

In der Regel wird es aber so sein, daß eines der ETS (die Implementation), mehr Details umfaßt als das andere (die Spezifikation).

Das führt dazu, daß die Implementation zusätzliche **interne Signale** $\Theta \subseteq \Sigma$ benutzt. Von diesen möchten wir abstrahieren.

Also fassen wir zwei ETS M_i und M_s genau dann gleich auf, wenn sie bezüglich $\Sigma - \Theta$ gleich sind.

Äquivalenz auf ETS (3)

Dazu definieren wir die Funktion Filter wie folgt:

$$\mathit{Filter}_{\ominus}(w) := \begin{cases} \lambda & \text{if } w = \lambda \\ \mathit{Filter}_{\ominus}(v) & \text{if } w = xv \wedge x \in \ominus \\ x\mathit{Filter}_{\ominus}(v) & \text{if } w = xv \wedge x \notin \ominus \end{cases}$$

Dann ist Sprachgleicheit bezüglich interner Signale definiert wie folgt:

$$M_i \overset{\mathcal{L}}{\underset{\ominus}{=}} M_s :\Longleftrightarrow \mathit{Filter}^*_{\ominus}(\mathcal{L}(M)) = \mathit{Filter}^*_{\ominus}(\mathcal{L}(M')).$$

Wechsel

Partielle Worte

Ein **Partielles Wort** ist ein Tripel $\langle Q, \leq, \alpha \rangle$ mit

- $\leq$ eine partielle Ordnung ist (reflexiv, transitiv, anti-symmetrisch);
- $\alpha : Q \to \Sigma$

Endliches PW: Q ist endlich (und damit $\leq$).
Impliziert: exisitiert Anfangskonfiguration.

Petrinetze

Ein **Petrinetz** ist ein Quadrupel $\langle P, T; F; \Sigma, \alpha\rangle$ mit

- P, T: disjunkte Mengen von Plätzen und Transitionen;
- F eine Flußrelation: $F \subseteq P \times T \cup T \times P$;
- $\alpha : T \to \Sigma$ eine Ettikettierung

Also: ein bipartiter Graph. Ein PN heißt endlich, wenn P und T endlich sind.

Notationen: Sei $X = P \cup T$, dann definiere ${}^\bullet x = \{y \in X \mid y\ F\ x\}$ und $x^\bullet = \{y \in X \mid x\ F\ y\}$.

Markierung, Schalten

Gegeben sei ein Netz $\langle P, T; F; \Sigma, \alpha \rangle$.

Eine **Markierung** ist eine Abbildung $m : P \to \mathbb{N}_0$. Alternativ können Markierungen auch als Wörter über dem kommutativen Monoid über P betrachtet werden.

Eine Transition ist aktiviert in einer Markierung, gdw. alle *pre*-Plätze markiert sind, also:

$$m \xrightarrow{t} :\Longleftrightarrow \forall_{p \in {}^\bullet t} : m(p) > 0.$$

Eine Transition kann schalten, wenn sie aktiviert ist, und erreicht dadurch eine Folgemarkierung:

$$m \xrightarrow{t} m - {}^\bullet t + t^\bullet.$$

Markierung, Schalten

Markierung, Aktivierung und Schalten können auf Folgen w von Transitionen verallgemeinert werden.

$$m \xrightarrow{w} m' :\Longleftrightarrow$$

$$\exists\{m_1, \ldots, m_{|w|}\} : \forall 1 < i \leq |w| :$$
$$m_{i-1} \xrightarrow{w_i} m_i \ \wedge\ m = m_0 \ \wedge\ m' = m_{|w|}$$

$$m \xrightarrow{w.t} :\Longleftrightarrow$$

$$m \xrightarrow{w} m' \ \wedge\ m' \xrightarrow{t} .$$

Schaltfolgen

Die Menge der Schaltfolgen von N ab m ist $F(m) = \{w \in T^* \mid m \xrightarrow{w}\}$.

Die Sprache von N ab m ist $L(m) = \{\alpha(w) \mid w \in F(m)\}$.

In der Regel werden $F(m_0)$ und $L(m_0)$ betrachtet.

Erreichbare Markierungen

Sei m_0 die Anfangsmarkierung von N.

$$\mathcal{R}(M,t) := \{m' \in P^* \mid \exists m \in M \colon m \xrightarrow{t} m'\}$$
$$\mathcal{R}(M,w) := \begin{cases} \mathcal{R}(\mathcal{R}(M,t),w') & \text{if } w = t.w' \\ M & \text{if } w = \lambda \end{cases}$$
$$\mathcal{R}(M) := \bigcup_{w \in T^*} \mathcal{R}(M,w)$$

mit $t \in T$ und $w \in T^*$.

Eine Markierung m heißt **Heimatmarkierung**, gdw. $m \in \mathcal{R}_N(\mathcal{R}_N(\underline{m}))$ für m_0.

Verbindung zu ETS

Gegeben ein Petrinetz $N = \langle P, T; F; \Sigma, \alpha \rangle$ mit Anfangs- und Endmarkierung m_0 und m_e. Dann ist $M = \langle Q, \Sigma, \rightarrow, m_0, m_e \rangle$ mit

$$Q := \mathcal{R}(\{m_0\})$$
$$\rightarrow := \{\langle q, l, q' \rangle \mid q \in \mathcal{R}(m_0) \wedge \exists t \in T : (q' \in \mathcal{R}(q, t) \wedge \alpha(t) = l)\}$$

ein (verwurzeltes, terminales) ETS mit der gleichen Sprache wie N:

$$L_N(m_0) = L_M(q_0).$$

Beweis: Übung.

Verbindung zu PW

Ein Ablauf eines Petrinetzes heißt **Prozeß**, und kann wieder durch ein (spezielles) Petri-Netz dargestellt werden.

Verbindung zu PW

Ein Petrinetz $\langle P, T; F, \Sigma, \alpha \rangle$ heißt **B/E-Netz**, gdw.

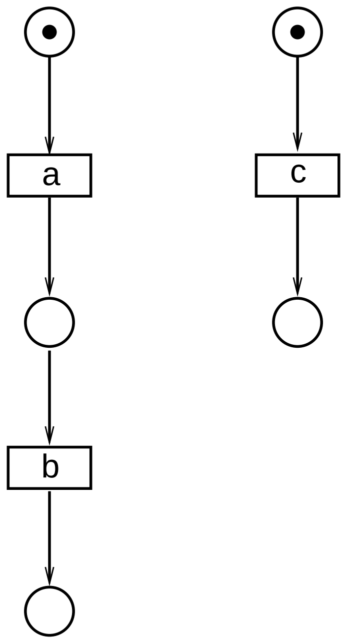
es ist nicht Platz-verzweigend, i.e. $\forall_{p \in P} : \; p^{\bullet} \leq 1 \wedge {}^{\bullet}p \leq 1$,

F ist wohlfundiert und nicht zirkulär: $F^{+} \cap (F^{-})^{+} = \emptyset$;

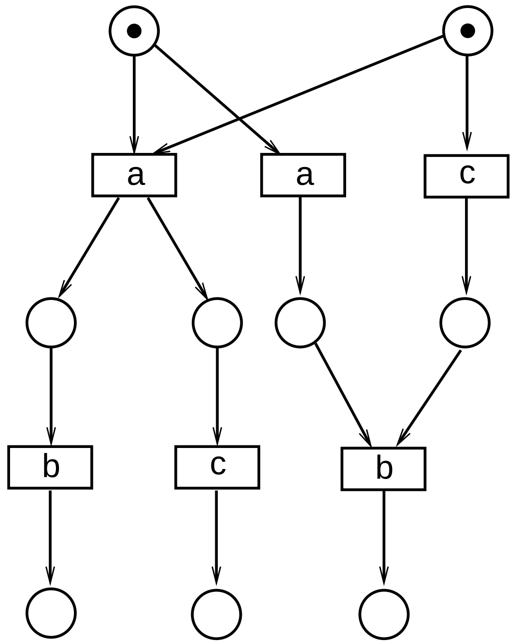
und endlich verzweigend, i.e. $\forall p \in P : \{t \in T \,|\, t \in p^{\bullet}\}$ ist endlich.

Verbindung zum Netz wird hergestellt durch eine Funktion r von den Netzelementen des Ablaufs auf die Netzelemente des Ursprungsnetzes.

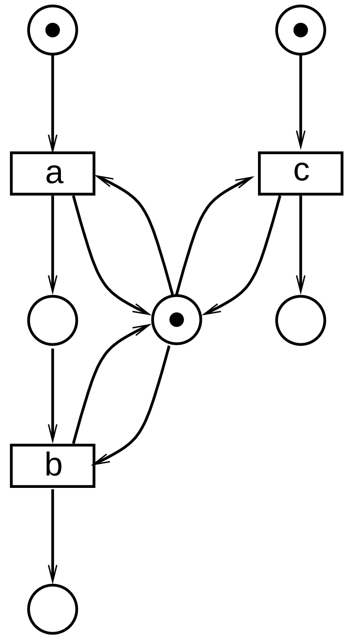
Vergleich von Semantiken



$\{a.b.c, a.c.b, c.a.b\}$



$\{a.b.c, a.c.b, c.a.b\}$



$\{a.b.c, a.c.b, c.a.b\}$

Fairness

$(pr)^\omega$ ist ein unendlicher terminaler Ablauf - q aber unfair gegenüber q

p^ω ist ein unendlicher terminaler Ablauf - unendlich oft möglich $\Longrightarrow$ kommt unendlich oft vor (starke Fairness)

unendlicher terminaler Ablauf - unendlich lang möglich $\Longrightarrow$ kommt irgendwann vor (schwache Fairness) wenn etwas passieren kann, dann passiert irgendwann auch etwas (Progresseigenschaft)

offensichtlich gilt: starke F. impliziert schwache F. impliziert Progresseigenschaft

Was heißt Fairness bei unendlicher Verzweigung? Was heißt Termination bei unendlich langen Ketten?