

Übungen zu Informatik I

Aufgabe 3-1 Terminierung und Beweis einer Eigenschaft (keine Abgabe)

Die Funktion f ist definiert als

```
f = function(x : nat, y : nat, z : nat) bool :  
    if x = y + 1 then (z + y) mod 2 = 0  
    else f(x + y + 1, 2 * (y + 1), z + y + 1)
```

- Bestimmen Sie $f(6, 0, 1)$.
- Zeigen Sie, dass f für alle Eingaben $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $x > y$ terminiert.
- Zeigen Sie, dass für alle Eingaben $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $x > y$ gilt: $f(x, y, z)$ ist genau dann *true*, wenn $x + z$ ungerade ist.

Aufgabe 3-2 Terminierung (keine Abgabe)

Die Funktion f ist definiert als

```
f = function (m : nat, n : nat) nat :  
    if m ≤ 1 ∨ n ≤ 1  
    then 42  
    else if m mod 2 = 0  
         then 3 * f(m + 1, n - 2)  
         else 1 + f(m - 1, n)
```

Zeigen Sie, dass f für alle Eingaben $m, n \in \mathbb{N}$ terminiert.

Aufgabe 3-3 Terminierung (4 Punkte)

Die Funktion qzt ist definiert als

```
qzt = function(n : nat, k : nat) bool :  
    if k = 0 then n = k  
    else n = k * k ∨ qzt(n, k - 1)
```

- Bestimmen Sie $qzt(5, 5)$.
- Zeigen Sie, dass qzt für alle Eingaben $n, k \in \mathbb{N}$ terminiert.

Aufgabe 3-4 Summe der Quadratzahlen (4 Punkte)

Die Funktion sum ist definiert als

```
sum = function(n : nat) nat :  
    if n = 0 then 0  
    else n * n + sum(n - 1)
```

Zeigen Sie, dass die Funktion die Summe der Quadrate der Zahlen von 1 bis n (mit $n \in \mathbb{N}$) berechnet.

Hinweis: Für $n = 0$ ist diese Summe 0.

Aufgabe 3-5**Abwechselnde Boolesche Funktion**

(4 Punkte)

Die Funktion f ist definiert als

```
 $f = \mathbf{function}(n : \mathbf{nat}, x : \mathbf{bool}, y : \mathbf{bool}) \mathbf{bool} :$   
  if  $n = 0$  then  $x \wedge y$   
  else  $\neg f(n - 1, \neg x, \neg y)$ 
```

Zeigen Sie, dass für alle Eingaben $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbf{bool}$ gilt:

$$f(n, x, y) = \begin{cases} x \wedge y & \text{falls } n \text{ gerade} \\ x \vee y & \text{sonst.} \end{cases}$$