Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. M. Hölzl, F. Hacklinger

WS 2005/2006
Blatt 3

Übungen zu Informatik I (Lösungsvorschlag)

Aufgabe 3-1 (keine Abgabe)

a) Die Auswertung von $f(6,0,1)$ ergibt:

$$\begin{aligned} f(6,0,1) &= f(7,2,2) \\ &= f(10,6,5) \\ &= f(17,14,12) \\ &= f(32,30,27) \\ &= f(63,62,58) \\ &= 120\,mod\,2 = 0 \\ &= \mathit{true} \end{aligned}$$

b) Seien $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x > y\}$, $M = \mathbb{N}$, $\prec=<$ und sei $h : A \to M$ definiert durch $h(x,y,z) = x - y$. Wir müssen zeigen, dass für jeden induzierten Aufruf $f(x',y',z')$ im Rumpf von f gilt: $(x',y',z') \in A$ und $h(x',y',z') \prec h(x,y,z)$.

1. Fall: $x = y + 1$. In diesem Fall gibt es keinen induzierten Aufruf und f terminiert.

2. Fall: $x = y + n$ mit $n > 1$. In diesem Fall gibt es einen induzierten Aufruf

$$f(x+y+1, 2(y+1), z+y+1) \quad .$$

Zu zeigen sind die folgenden beiden Aussagen: $(x+y+1, 2(y+1), z+y+1) \in A$ und $h(x+y+1, 2(y+1), z+y+1) \prec h(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} x+y+1-2(y+1) &= 2y+n+1-2y-2 \\ &= n-1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Somit ist $(x+y+1, 2(y+1), z+y+1) \in A$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} h(x+y+1, 2(y+1), z+y+1) &= x+y+1-2(y+1) \\ &= 2y+n+1-2y-2 \\ &= n-1 \\ &< n \\ &= x-y \\ &= h(x,y,z) \end{aligned}$$

c) Seien wieder $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x > y\}$, $M = \mathbb{N}$, $\prec=<$ und sei $h : A \to M$ definiert durch $h(x,y,z) = x - y$. Sei $(x,y,z) \in A$ mit $h(x,y,z) = n$.

Induktionsvoraussetzung: Für alle $(x',y',z') \in A$ mit $h(x',y',z') < n$ gilt $f(x',y',z') = \mathit{true}$ genau dann, wenn $x' + z'$ ungerade ist.

Induktionsschluss: Zu zeigen ist: Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass $f(x,y,z)$ genau dann *true* ist, wenn $x + z$ ungerade ist. Dazu zeigen wir die folgenden zwei Aussagen:

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in A. x + z\,mod\,2 \neq 0 &\implies f(x,y,z) = \mathit{true} \\ \forall (x,y,z) \in A. x + z\,mod\,2 = 0 &\implies f(x,y,z) = \mathit{false} \end{aligned}$$

1. Fall: $x = y + 1$:

- Ist $x + z$ ungerade, so gibt es folgende Möglichkeiten:
  - x ungerade, z gerade. Da $x = y + 1$ ist, folgt, dass y gerade ist. Somit is $z + y$ gerade, d.h. $z \, mod \, 2 = 0$
  - x gerade, z ungerade. Dann ist y ungerade, also ist $z + y$ gerade.

  Damit ist die erste Aussage für den 1. Fall gezeigt.
- Ist $x + z$ gerade, so gibt es die folgenden Möglichkeiten:
  - x gerade, z gerade. Somit sind y ungerade und $z + y$ ungerade.
  - x ungerade, z ungerade. Dann sind y gerade und $z + y$ ungerade.

  Damit ist die zweite Aussage für den 1. Fall gezeigt.

2. Fall: $x = y + n$ mit $n > 1$. in diesem Fall ist

$$f(x, y, z) = f(x + y + 1, 2(y + 1), z + y + 1).$$

In Teilaufgabe b) wurde bereits gezeigt, dass $(x + y + 1, 2(y + 1), z + y + 1) \in A$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist $f(x, y, z) = true$ genau dann, wenn $(x + y + 1) + (z + y + 1) = x + z + 2y + 2$ ungerade ist. Da $2y + 2 \, mod \, 2 = 0$ gilt, ist also $f(x, y, z) = true$ genau dann, wenn $x + z$ ungerade ist.

Aufgabe 3-2 **Abstiegsfunktion** (keine Abgabe)

Wir zeigen die Terminierung der Funktion

f = **function** (m : **nat**, n : **nat**) **nat** :
  if $m \leq 1 \vee n \leq 1$
  then 42
  else if $m \bmod 2 = 0$
    then $3 * f(m + 1, n - 2)$
    else $1 + f(m - 1, n)$

mittels einer Abstiegsfunktion. Seien $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $M = \mathbb{N}$, $\prec = <$ $h : A \to M$ mit $(m, n) \mapsto m + n$. Dann wird für $(m, n) \in A$ mit $m > 1 \wedge m > 1$ entweder $f(m+1, n-2)$ oder $f(m-1, n)$ rekursiv aufgerufen. Im ersten Fall gilt:

$$h(m + 1, n - 2) = m + n - 1 \prec m + n = h(m, n) \quad ,$$

im zweiten Fall erhalten wir

$$h(m - 1, n) = m + n - 1 \prec m + n = h(m, n)$$

Für $m \preceq 1 \vee n \preceq 1$ finden keine induzierten Aufrufe statt.

Aufgabe 3-3 **Terminierung** (4 Punkte)

a) Die Auswertung von $qzt(5, 5)$ ergibt:

$$\begin{aligned}
qzt(5, 5) &= 5 = 5 * 5 \textbf{ or } qzt(5, 4) \\
&= qzt(5, 4) \\
&= 5 = 4 * 4 \textbf{ or } qzt(5, 3) \\
&= qzt(5, 3) \\
&= 5 = 3 * 3 \textbf{ or } qzt(5, 2) \\
&= qzt(5, 2) \\
&= 5 = 2 * 2 \textbf{ or } qzt(5, 1) \\
&= qzt(5, 1) \\
&= 5 = 1 * 1 \textbf{ or } qzt(5, 0) \\
&= qzt(5, 0) \\
&= 5 = 0 \\
&= \mathit{false}.
\end{aligned}$$

b) qzt terminiert für jede Eingabe $n, k \in \mathbb{N}$: Wir definieren $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $M = \mathbb{N}$, $\prec = <$ und $h : A \to M$, $h(n, k) = k$.

Für $k = 0$ terminiert $qzt(0)$ ohne induzierten rekursiven Aufruf, für $k > 0$ ist mit (n, k) auch $(n, k-1) \in A$, und offensichtlich gilt

$$h(n, k-1) = k - 1 \qquad < k = h(n, k)$$

Aufgabe 3-4 **Summe der Quadratzahlen** (4 Punkte)

Wir zeigen die Aussage durch vollständige Induktion. Seien $A = \mathbb{N}$, $M = \mathbb{N}$, $h : A \to M$ die Identitätsfunktion, d.h. $h(x) = x$. Sei $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsvoraussetzung: Für alle $n' < n$ gilt $sum(n') = 0 = \sum_{i=0}^{n'} i^2$

Induktionsschritt: 1. Fall: $n = 0$. Dann gilt $sum(0) = 0 = \sum_{i=0}^{0} i^2$

2. Fall: Sei $n > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, dass gilt:

$$sum(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} sum(n) &= n^2 + sum(n-1) \\ &=^{IV} n^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n} i^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3-5 **Terminierung** (4 Punkte)

Wir zeigen die folgende Hilfsaussage:

$$\begin{aligned} & f(n, x, y) = x \wedge y \implies f(n+1, x, y) = x \vee y \\ \wedge \quad & f(n, x, y) = x \vee y \implies f(n+1, x, y) = x \wedge y \end{aligned}$$

Gelte $f(n, x, y) = x \wedge y$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(n+1, x, y) &= \neg f(n, \neg x, \neg y) \\ &= \neg(\neg x \wedge \neg y) \\ &= \neg\neg x \vee \neg\neg y \\ &= x \vee y \end{aligned}$$

Dual dazu ergibt sich für $f(n, x, y) = x \wedge y$:

$$\begin{aligned} f(n+1, x, y) &= \neg f(n, \neg x, \neg y) \\ &= \neg(\neg x \vee \neg y) \\ &= \neg\neg x \wedge \neg\neg y \\ &= x \wedge y \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir daraus die Aussage:

Seien $A = \mathbb{N} \times \textbf{bool} \times \textbf{bool}$, $M = \mathbb{N}$, $\prec = <$ und $h : A \to M$ definiert durch $h(n, x, y) = n$. Sei $(n, x, y) \in A$.

Induktionsvoraussetzung: Für alle $n' \in A$ mit $h(n') < h(n)$ gilt $f(n', x, y) = x \wedge y$, falls n' gerade ist und $f(n', x, y) = x \vee y$, falls n' ungerade ist.

Induktionsschluss: 1. Fall: $n = 0$. Es gilt $f(0, x, y) = x \wedge y$.

2. Fall: Sei $n > 0$ gerade (bzw. ungerade). Dann ist $n - 1 \in A$ ungerade (bzw. gerade) und nach Induktionsvoraussetzung gilt $f(n-1, x, y) = x \vee y$ (bzw. $f(n-1, x, y) = x \wedge y$). Aus der Hilfsaussage folgt die Behauptung.

Hinweis: Die Hilfsaussage allein ist nicht ausreichend. Z.B. gilt die Hilfsaussage *mutatis mutandis* auch für die Funktion

g = **function**(n : **nat**, x : **bool**, y : **bool**) **bool** :
    if $n = 0$ **then** $x \wedge \neg y$
    else $\neg g(n-1, \neg x, \neg y)$

Aber $g(0, x, y) \neq x \wedge y$.