Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. M. Hölzl, F. Hacklinger

WS 2005/2006
Blatt 4

Übungen zu Informatik I

Aufgabe 4-1 **Binomialkoeffizienten** (keine Abgabe)

Für Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k \geq 1$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ unter Verwendung der genannten Formeln berechnet.

b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus für alle Eingaben $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ terminiert.

Aufgabe 4-2 **Binomialverteilung** (4 Punkte)

Eine Lostrommel wird mit n Losen befüllt. Jedes Los ist entweder eine Niete oder bringt einen Gewinn. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Los einen Gewinn bringt, sei p ($p \in \mathbb{R}$, $0 \leq p \leq 1$). Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Lostrommel genau k Gewinnlose enthalten sind, kann durch

$$B(n,p,k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \text{mit } k, n \in \mathbb{N} \text{ und } k \leq n$$

berechnet werden.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass die Trommel genau k Gewinnlose enthält ($k \leq n$).

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass die Trommel mindestens l und höchstens m Gewinnlose enthält ($l \leq m \leq n$).

c) Zeigen Sie, dass die Algorithmen aus a) und b) für alle $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ bzw. $l \leq m \leq n$ und $p \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p \leq 1$ terminieren.

Hinweis: Sie können die Ergebnisse von Aufgabe 4-1 bei der Lösung verwenden.

Aufgabe 4-3 **Terminierung** (4 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

f_1 = **function** (n : **int**) **int** :
    if $n = 0 \vee n = 1 \vee n = 2$
    then 1
    else $f_1(n-3)$.

f_2 = **function** (n : **int**) **int** :
    if $n = 0$
    then 1
    else $f_2(n-3)$.

a) Zeigen Sie: f_1 terminiert für alle $n \geq 0$.

b) Geben Sie ein $n \geq 0$ an, für das $f_2(n)$ nicht terminiert.

c) Begründen Sie *kurz*, warum der Beweis für die Terminierung von f_1 nicht auf f_2 übertragbar ist.

d) Zeigen Sie: Die Funktion f_2 terminiert für alle durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen.

Aufgabe 4-4 **Berechnung der Fibonacci Zahlen** (4 Punkte)

a) Zeigen Sie: Bei dem in der Vorlesung angegebenen Algorithmus für die Fibonacci-Funktion werden zur Berechnung von $\mathit{fib}(n)$ mindestens $\mathit{fib}(n)$ Funktionsaufrufe ausgewertet.

b) Der folgende Algorithmus ist ein anderes Verfahren zur Berechnung der Fibonacci-Funktion:

f_{iter} = **function** (n : **nat**, p : **nat**, q : **nat**)
  if $n \leq 1$
  then p
  else $f_{iter}(n-1, p+q, p)$

fib' = **function** (n : *nat*) **nat** :
  $f_{iter}(n, 1, 1)$

Zeigen Sie: Es gibt $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$, so dass zur Berechnung von $\mathit{fib}'(n)$ höchstens $c_1 \cdot n + c_2$ Funktionsaufrufe ausgewertet werden.

c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathit{fib}(n) = \mathit{fib}'(n)$.

Abgabe: Montag, 28.11.2005, 8:00 Uhr.