Ludwig-Maximilians-Universität München WS 2005/2006
Institut für Informatik Blatt 4
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. M. Hölzl, F. Hacklinger

Übungen zu Informatik I (Lösungsvorschlag)

Aufgabe 4-1 **Binomialkoeffizienten** (keine Abgabe)

Es gilt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$. Damit: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\cdot k!} = \frac{(n-1)!\cdot k! + (n-1)!\cdot(n-k)}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{(n-1)!\cdot(k+n-k)}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$

a) $\binom{n}{k}$ kann durch $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ berechnet werden und es gilt: $\binom{n}{0} = 1$ bzw. $\binom{n}{n} = 1$.

nueberk $=$ **function**$(n$: **nat**, k : **nat**$)$ **nat** :
  if $k = 0 \vee n = k$ **then** 1
  else $nueberk(n-1, k-1) + nueberk(n-1, k)$

b) Seien $A = \{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \geq k \geq 0\}$, $M = \mathbb{N}$, $\prec=<$ und sei $h : A \to M$ definiert durch $h(n,k) = n + k$.

1. Fall: $n = k \vee k = 0$: Es gibt keine rekursiven Aufrufe, *nueberk* terminiert.

2. Fall: $k < n \wedge k > 0$: In diesem Fall finden zwei rekursive Aufrufe statt: $nueberk(n-1, k-1)$ und $nueberk(n-1, k)$.

Es gilt zu zeigen:

1. $(n-1, k-1) \in A$ bzw. $(n-1, k) \in A$
2. $h(n-1, k-1) \prec h(n,k)$ bzw. $h(n-1,k) \prec h(n,k)$.

Zu 1:

- $k > 0 \implies k - 1 \geq 0$ und $n > k \implies (n-1) > (k-1)$ damit gilt: $(n-1, k-1) \in A$.
- $n > k \implies n - 1 \geq k$ damit gilt: $(n-1, k) \in A$.

Zu 2:

- $h(n-1, k-1) = n + k - 2 < n + k = h(n,k)$.
- $h(n-1, k) = n + k - 1 < n + k = h(n,k)$.

Deshalb gilt: *nueberk* terminiert.

Aufgabe 4-2 **Binomialverteilung** (4 Punkte)

a) Die Funktion *binom* an, die die Wahrscheinlichkeit für genau k Lose in der Lostrommel bestimmt, ist eine einfache Übersetzung der angegeben Formel in Pseudocode:

binom $=$ funtion$(n$: **nat**, p : **real**, k : **nat**$)$ **nat** :
  $nueberk(n,k) * p^k * (1-p)^{n-k}$

b) Die Funtion *vert* berechnet nun für alle k $(l \leq k \leq m)$ die Einzelwahrscheinlichkeiten und addiert diese:

vert $=$ **function**$(n$: **nat**, p : **real**, l : **nat**, m : **nat**$)$ **nat** :
  if $l = m$ **then** $binom(n,p,l)$
  else $binom(n,\, p,\, l) + vert(n,\, p,\, l+1,\, m)$

c) Seien $A = \{(n,p,l,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq l \leq m \leq n, 0 \leq p \leq 1\}$, $M = \mathbb{N}$, $\prec=<$ und $h : A \to M$ mit $h(n,p,l,m) = m - l$. 1. Fall: $l = m$. Es gibt keine rekursiven Aufrufe und *vert* terminiert.

2. Fall: $l < m$. Zu zeigen:

1. $(n, p, l+1, m) \in A$
2. $h(n, p, l+1, m) < h(n, p, l, m)$.

Zu 1: $l < m \implies l+1 \leq m$. Zusammen mit der Voraussetzung, dass $(n, p, l, m) \in A$ enthalten ist, gilt damit $(n, p, l+1, m) \in A$.

Zu 2: $h(n, p, l+1, m) = m - (l+1) = m - l - 1 < m - l = h(n, p, l, m)$

Damit gilt: *vert* terminiert.

Aufgabe 4-3 **Terminierung** (4 Punkte)

a) Seien $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$, $M = \mathbb{N}$, $\prec = <$, $h : A \to M$ mit $h(n) = n$.

1. Fall: $n \leq 2$. Es finden keine rekursiven Aufrufe von f statt.

2. Fall: $n > 2$. Es findet ein rekursiver Aufruf statt: $f(n-3)$. Es zu zeigen, dass:

1. $n - 3 \in A$
2. $h(n-3) < h(n)$

Zu 1: $n > 2 \implies n - 3 \geq 0$. Damit gilt: $n - 3 \in A$.

Zu 2: $h(n) = n > n - 3 = h(n-3)$

Also terminiert f.

b) Die Funktion f_2 terminiert genau dann nicht, wenn das Abbruchkriterium $n = 0$ nie zutrifft. Der einfachste Aufruf ohne Terminierung ist daher: $f(2) = f(-1) = f(-4) \ldots$

c) Laut Skript (2.4, Abstiegsfunktion), muss für jeden induzierten Funktionsaufruf u.a. gelten, dass die Parameter in A liegen, falls die Parameter des induzierenden Aufrufs in A liegen.

Die Fallunterscheidung aus Teilaufgabe a) läßt sich hier nicht mehr anwenden; die Abbruchbedingung ist so geändert, dass nur noch für $n = 0$ keine rekursiven Aufrufe durchgeführt werden.

Für den 2. Fall gilt dann: $n > 0$. Zu zeigen wäre: $n - 3 \in A$ (kann wiederlegt werden durch Beispiel: für $n = 1$ ist dann $n - 3 = -2$ nicht mehr in A.

d) Die Terminierung läßt sich zeigen, falls man den Definitionsbereich der Funktion auf positive, durch 3 teilbare Zahlen einschränkt:

Seien $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \wedge n \ mod \ 3 = 0\}$, $M = \mathbb{N}$, $h : A \to M$ mit $h(n) = n$, $\prec = <$.

1. Fall: $n = 0$. Keine rekursiven Aufrufe, also terminiert f.

2. Fall: $n > 0$. Zu zeigen: $n - 3 \in A$. n ist durch 3 teilbar falls gilt: $\exists k \in \mathbb{N}. k \cdot 3 = n$. Aus $n > 0$ folgt $k > 0$. Es gilt: $n - 3 = k \cdot 3 - 3 = (k-1) \cdot 3$.

Jetzt noch zu zeigen: $h(n-3) < h(n)$. Beweis analog zu Teilaufgabe a).

Aufgabe 4-4 **Berechnung der Fibonacci Zahlen** (4 Punkte)

a) Seien $A = M = \mathbb{N}$, $h : x \mapsto x$ die Identitätsfunktion, $\prec$ die natürliche Ordnung $<$. Sei T_n die Anzah der zur Berechnung von $\mathit{fib}(n)$ ausgewerteten Funktionsaufrufe.

Induktionsvoraussetzung: Für alle $m < n$ gilt $T_m \geq \mathit{fib}(m)$.

Induktionsschluss: Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $T_n \geq \mathit{fib}(m)$.

1. Fall: $n = 0$ oder $n = 1$. In diesem Fall gibt der Aufruf von $\mathit{fib}(0)$ oder $\mathit{fib}(1)$ unmittelbar einen Wert zurück. Somit gilt $T_0 = T_1 = 1$.

2. Fall: $n > 1$. Hier werden $\mathit{fib}(n-1)$ und $\mathit{fib}(n-2)$ aufgerufen, somit gilt:

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + T_{n-1} + T_{n-2} \\ &\geq 1 + \mathit{fib}(n-1) + \mathit{fib}(n-2) \\ &= 1 + fib(n) \end{aligned}$$

b) Sei $T'(n, p, q)$ die Anzahl der zur Auswertung von $f_{iter}(n, p, q)$ benötigten Funktionsaufrufe. Wir zeigen: $T'(n, p, q) \leq n + 1$.

Seien $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $M = \mathbb{N}$ mit fundierter Relation $<$, $h : A \to M$ die Projektion $h(n, p, q) = n$.

Induktionsvoraussetzung: Für alle n', p', q' mit $h(n', p', q') < h(n, p, q)$ gilt: $T'(n', p', q') \leq n + 1$.

1. Fall: $n = 0, 1$. In diesem Fall gibt f_{iter} sofort das Ergebnis zurück. Somit gilt $T'(0) = T'(1) = 1$.

2. Fall: $n > 1$ In diesem Fall ruft $f_{iter}(n, p, q)$ als einzigen induzierten Aufruf $f_{iter}(n-1, p, q)$ auf. Da $h(n - 1, p, q) < h(n, p, q)$ gilt

$$
\begin{aligned}
T'(n, p, q) &= 1 + T'(n - 1, p, q) \\
&\leq 1 + (n - 1) + 1 \\
&= n + 1
\end{aligned}
$$

c) Wenn man versucht direkt zu zeigen, dass gilt $fib(n) = f_{iter}(n, 1, 1)$ kommt man auf das Problem, dass gilt

$$f_{iter}(n, 1, 1) = f_{iter}(n - 1, 2, 1)$$

und dass man aus dieser Gleichung nicht direkt eine Aussage über den Wert von $f_{iter}(n, 1, 1)$ erhält, den man auf $f_{iter}(n-1, 1, 1)$ (oder allgemeiner $f_{iter}(n', 1, 1)$ mit $n' < n$) zurückführen kann.

Wenn man diese Überlegung aber (für genügend große Werte von n) fortführt erkennt man, dass folgende Gesetzmäßigkeit gilt:

$$
\begin{aligned}
f_{iter}(n, 1, 1) &= f_{iter}(n, fib(1), fib(0)) \\
&= f_{iter}(n - 1, fib(1) + fib(0), fib(1)) = f_{iter}(n - 1, fib(2), fib(1)) \\
&= f_{iter}(n - 2, fib(2) + fib(1), fib(2)) = f_{iter}(n - 2, fib(3), fib(2)) \\
&= f_{iter}(n - 3, fib(3) + fib(2), fib(3)) = f_{iter}(n - 3, fib(4), fib(3)) \\
&= f_{iter}(n - 4, fib(4) + fib(3), fib(4)) = f_{iter}(n - 4, fib(5), fib(4)) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Zum Beweis ist es allerdings vorteilhafter, die Aussage noch etwas zu verallgemeinern, da man dadurch eine stärkere Induktionsvoraussetzung und einen leichter angebbaren Induktionsschluss erhält: Man erkennt sofort, dass die Gesetzmäßigkeit nicht nur für $f_{iter}(n, fib(1), fib(0))$ gilt, sondern allgemeiner für $f_{iter}(n, fib(k), fib(k - 1))$, für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Wir zeigen deshalb die allgemeinere Aussage $f_{iter}(n, fib(k), fib(k - 1)) = fib(n + k - 1)$.

Sei für $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k$ die Funktion f definiert durch

$$f(n, k) = f_{iter}(n, fib(k), fib(k - 1))$$

Offensichtlich gilt $f_{iter}(n, fib(k), fib(k - 1)) = fib(n + k - 1)$ genau dann, wenn gilt $f(n, k) = fib(n+k-1)$. Wir zeigen $f(n, k) = fib(n+k-1)$ durch Induktion. Sei $A = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq k\}$. Seien $M = \mathbb{N}$ und $h : A \to M$ die Funktion $h(n, k) = n$. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n, k \geq 1$.

Induktionsvoraussetzung: Für alle $(n', k') \in A$ mit $h(n', k') < h(n, k)$ gilt $f(n', k') = fib(n' + k' - 1)$.

Induktionsschluss: Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $f(n, k) = fib(n + k - 1)$.

1. Fall: $n = 1$. In diesem Fall gibt es keinen induzierten Aufruf und es gilt

$$
\begin{aligned}
f(n, k) &= f_{iter}(n, fib(k), fib(k - 1)) \\
&= fib(k) \\
&= fib(n + k - 1)
\end{aligned}
$$

2. Fall: $n > 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(n,k) &= f_{iter}(n, \mathit{fib}(k), \mathit{fib}(k-1)) \\ &= f_{iter}(n-1, \mathit{fib}(k) + \mathit{fib}(k-1), \mathit{fib}(k)) \end{aligned}$$

und da nach Definition $\mathit{fib}(k) + \mathit{fib}(k-1) = \mathit{fib}(k+1)$

$$= f_{iter}(n-1, \mathit{fib}(k+1), \mathit{fib}(k))$$

wegen $n > 1$ ist $n-1, k+1 \in A$ und wegen $h(n-1, k+1) = n-1 < n = h(n,k)$ gilt also

$$\begin{aligned} &=^{\mathrm{IV}} \mathit{fib}(n-1+(k+1)-1) \\ &= \mathit{fib}(n+k-1) \end{aligned}$$

Wir haben bis jetzt also gezeigt, dass für $n \geq 1$ gilt

$$f_{iter}(n,1,1) = f(n,1) = \mathit{fib}(n).$$

Für $n = 0$ gilt aber

$$f_{iter}(0,1,1) = 1 = \mathit{fib}(0).$$

Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathit{fib}'(n) = f_{iter}(n,1,1) = \mathit{fib}(n).$$