Komplexität von Algorithmen

Martin Wirsing

in Zusammenarbeit mit
Michael Barth, Fabian Birzele und Gefei Zhang

http://www.pst.informatik.uni-muenchen.de/lehre/WS0506/infoeinf/

WS 05/06

Ziele

- Zeit- und Speicherplatzbedarf einer Methode berechnen können
- Unterschiede der Komplexität vom schlechtesten, besten und mittleren Fall kennen
- *O*-Notation kennen lernen
- „Praktische“ Berechenbarkeit eines Algorithmus einschätzen können

Zeit- und Speicherplatzbedarf

Der Aufwand für die Abarbeitung eines Algorithmus hängt ab von

- Art, Anzahl und Zusammensetzung der verwendeten Datentypen und algorithmischen Konzepte
- Art der Realisierung der Datentypen und algorithmischen Konzepte auf einer bestimmten Rechenanlage (z.B. Verwaltungsaufwand bei Rekursion) sowie von konkreten Maschineneigenschaften (z.B. Art und Ausführungsgeschwindigkeit der Maschinenoperationen).

Zeit- und Speicherplatzbedarf

Der Einfachheit halber zählen wir

- beim **Zeitbedarf**
  - die Anzahl der Anweisungen, **oder**
  - die **Anzahl der (zeitintensiven) Operationen**

  z.B. bei der Berechnung des Minimums einer Reihung die Anzahl der notwendigen Vergleiche.

- beim **Speicherplatzbedarf** die maximale Anzahl der während der Berechnung benötigten Speicherplätze für (neue) lokale Variablen und (neuen) Objekte,

  z.B. bei der Berechnung des Minimums einer Reihung die lokalen Variablen
  für die Parameterübergabe und das Resultat,
  für die Zwischenspeicherung des Minimums und
  für die Laufvariable der Schleife.

Beispiel: Suche nach dem minimalen Element einer Reihung

	Zeitbedarf (Anzahl der Vergleiche von Reihungselementen)	Speicherplatzbedarf
`int min(int[] a)`	0	2
`{ int minIndex = 0;`	0	1
`int laenge = a.length;`	0	1
`for (int i = 1; i < laenge; i++)`	a.length-1	1
`{ if (a[i] < a[minIndex])`		
`minIndex = i;`		
`}`		
`return a[minIndex];`	0	1
`}`		

Zeitbedarf gesamt: a.length - 1 Vergleiche von Reihungselementen
Speicherplatzbedarf gesamt: 6 Maschinenwörter

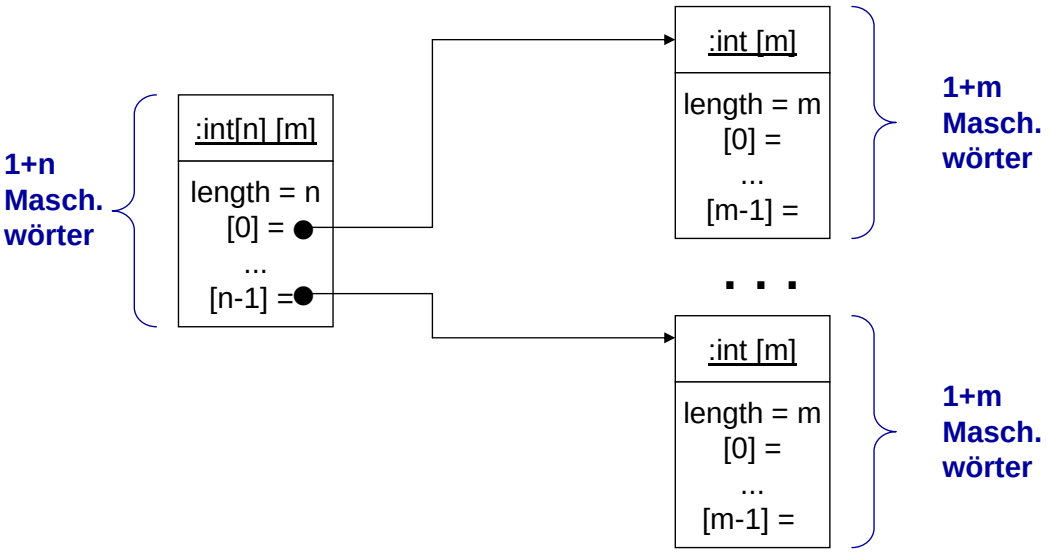
Speicherplatzbedarf

Konstrukt	Speicherplatzbedarf S
Jedes Element vom **Grundtyp oder Objekttyp** (Objektreferenz) belegt im **Keller**	1 Maschinenwort
Also	
Deklaration einer lokalen Variable	1 Maschinenwort (im Keller)
Formaler Parameter	1 Maschinenwort (im Keller)
Erzeugung eines Objekts	Summe des Speicherplatzbedarfs der Attribute
Erzeugung einer Reihung vom Typ `type`	1+ (Länge des Feldes * Bedarf für 1 Wert vom Typ `type`)
z.B.	
▪ einstufige **`int`**-Reihung	1 + Länge der Reihung viele Maschinenwörter
▪ zweistufige Reihung **`int`** `[n][m]`	`1 + n + ((1+m) * n)` viele Maschinenwörter

Für die Speicherung der Länge des Feldes

Speicherplatzbedarf: 2-dim. Reihung

Der Speicherplatzbedarf einer zwei-stufigen Reihung vom Typ **`int`**`[n][m]` beträgt
`1 + n + ((1+m) * n)` Maschinenwörter:



Speicherplatzbedarf

Beispiele:

1. `Point p = new Point ();`

Speicherplatzbedarf : `1 Maschinenwort für p`
`2 Maschinenwörter für new Point()`

2. **Speicherplatzbedarf :**

```
int x = 5;                                    1
int[] myArray = new int [6*x];            1 + (1+30)
int laenge = myArray.length;                  1
myArray[0]=1;                                 0
for (int k=1; k<laenge; k++)                  1
    myArray[k] = 2*myArray[k-1];              0
```

Also **Speicherplatzbedarf :** `35 Maschinenwörter`

Zeitbedarf

Konstrukt	Zeitbedarf
`x = exp;`	`1 +` Zeit von `exp` , falls Anweisungen gezählt Zeit von `exp` , sonst
`exp1 op exp2`	Zeit von `exp1` + Zeit von `op` + Zeit von `exp2`
S_1 S_2	Zeit von S_1 + Zeit von S_2
`if` `(B)` S_1 **`else`** S_2	Zeit von B + Zeit von S_1, falls `B == true`, Zeit von B + Zeit von S_2 , falls `B == false`
`while` `(B) { S }`	Zeit von B + Anzahl der Durchläufe * (Zeit von B + Zeit von S)
`for``(`**`int`**` k=A; B; k++) { S }`	Zeit von(**`int`** `k=A;`) + Zeit von B + Anzahl der Durchläufe * (Zeit von B + Zeit von S + Zeit von k++)

Beispiel: Suche im (ungeordneten) Feld

Zeitbedarf Speicherplatzbedarf

(Zeitberechnung nach **Anzahl aller Vergleiche)**

Sei die Reihung **`char`**`[] arr` gegeben.

`int` `laenge = arr.length;`	`0`	`1`
`int` `i = 0;`	`0`	`1`
`while` `(i < laenge && !(arr[i] == e))i++;`	`≤ 1 + laenge*2`	`0`
`boolean` `result = (i < laenge);`	`1`	`1`

Zeitbedarf (Anzahl aller Vergleiche): `≤ 2 + arr.length * 2`

Speicherplatzbedarf: `3`

Zeitbedarf von Methodenaufrufen

Sei die Methode `type m(type1 x) {stms}` der Klasse `C` gegeben.

- Der **Zeitbedarf** *eines Aufrufs o.m (a)* berechnet sich aus der Summe
  - der Kosten der Parameterübergabe,
    d.h. den Kosten der Berechnung von `this=o; x=a;`
    und organisatorischen Kosten (die wir außer Acht lassen)
  - und dem Zeitbedarf für die Ausführung des Rumpfes
- Der **Speicherplatzbedarf** *eines Aufrufs o.m (a)* berechnet sich aus der Summe
  - der Kosten der Parameterübergabe,
    d.h. dem Speicherplatzbedarf von `C this = o; type1 x = a;`
    und organisatorischen Kosten (die wir außer Acht lassen)
  - und dem Speicherplatzbedarf für die Ausführung des Rumpfes
    (inklusive dem Speicherplatzbedarf für das Resultat `return exp;`)

0 , falls `type == void`
1, sonst

Beispiel: Suche im (ungeordneten) Feld

```
class SA                                                Zeitbedarf      Speicherplatzbedarf
{  int[] arr;                  (Zeitberechnung nach Anzahl aller Vergleiche)
   public SA(int[]a){ arr = a; }
   boolean such(int e)                                    0                2
  {    int k = this.arr.length;                          0                1
       int i = 0;                                        0                1
       while (i < k && !(arr[i] == e))i++;          ≤ 1 + k*2              0
       return (i < k);}                                  1                1
   public static main (String[] args)
   {   int a1 = {3,5,7,9}, a2 = {2,4,6,8}, a3 = {7,3,9,5};
       SA o1 = new SA(a1); SA o2 = new SA(a2); SA o3 = new SA(a3); }
 }
```

Zeitbedarf für

`o1.such(3); : 3` `o2.such(3); :10` `o3.such(3); : 5`

Speicherplatzbedarf für

`o1.such(3); : 2+3` `o2.such(3); :2+3` `o3.such(3); : 2+3`

Zeit- und Speicherplatzbedarf von Methoden

Sei die Methode `type m() {stms}` gegeben.

- Der Zeit- und Speicherplatzbedarf einer Methode ist

  abhängig vom aufrufenden Objekt (und **den aktuellen Parametern** – sofern vorhanden).

Bem. : Dies gilt auch für Konstruktoren, bei denen Zeit- und Speicherplatzbedarf analog berechnet werden.

Beispiel: Suche im (ungeordneten) Feld

	Zeitbedarf	Speicherplatzbedarf
class SA		
{ **int**[] arr;	(Zeitberechnung nach **Anzahl aller Vergleiche)**	
public SA(int[]a){ arr = a; }		
boolean such(**int** e)	0	2
{ **int** k = **this**.arr.length;	0	1
int i = 0;	0	1
while (i < k && !(arr[i] == e))i++;	≤ 1 + k*2	0
return (i < k);}	1	1
}		

Zeitbedarf für `o.such(e)` ≤ `2*(1 + o.arr.length)`

Speicherplatzbedarf für `o.such(e)` 5

Zeitbedarf für `new SA(a)` 0 (Anzahl der Vergleiche)

[bzw. 2 (Anzahl der Zuweisungen)]

Speicherplatzbedarf für `new SA(a)` 1 + 1

für formalen Parameter (im Keller) — für Attribut (auf Halde)

Komplexitätsarten

- Um den Zeit- und Speicherplatzbedarf verschiedener Algorithmen vergleichen zu können, abstrahiert man von der speziellen Eingabe und gibt die Kosten *in* **Abhängigkeit von der *Größe* der Eingabe** an.
- Der Algorithmus zum Suchen eines Elements in einer Reihung liefert für **Reihungen gleicher Länge unterschiedliche Kosten** bei der Zeit.
- Um solche Unterschiede abschätzen zu können, unterscheidet man die

  Komplexität im schlechtesten, mittleren und besten Fall

  (engl. worst case, average case, best case complexity).

Komplexität im schlechtesten, besten und mittleren Fall

Sei die Methode `type1 m(type x) {stms}` gegeben und bezeichne
$T_m(o,a)$ den Zeitbedarf von `o.m(a);` und
$S_m(o,a)$ den Speicherplatzbedarf von `o.m(a);` .

Zeitkomplexität im

schlechtesten Fall $T^w_m(n) = max\{T_m(o,a) \mid (\text{Gesamtgröße von } o \text{ und } a) = n\}$
mittleren Fall $T^{av}_m(n) = \text{Durchschnitt von } \{T_m(o,a) \mid (\text{Gesamtgröße von } o \text{ und } a) = n\}$
besten Fall $T^b_m(n) = min\{T_m(o,a) \mid (\text{Gesamtgröße von } o \text{ und } a) = n\}$

Speicherkomplexität im

schlechtesten Fall $S^w_m(n) = max\{S_m(o,a) \mid (\text{Gesamtgröße von } o \text{ und } a) = n\}$
mittleren Fall $S^{av}_m(n) = \text{Durchschnitt von } \{S_m(o,a) \mid (\text{Gesamtgröße von } o \text{ und } a) = n\}$
besten Fall $S^b_m(n) = min\{S_m(o,a) \mid (\text{Gesamtgröße von } o \text{ und } a) = n\}$

Beispiele für den Zeit- und Speicherplatzbedarf des Rumpfs einer Methode

Suchen in einer Reihung:

Wir wählen als Gesamtgröße der aktuellen Parameter o, e die Größe n der Reihung von o.

- $T^{w}_{such}(n) = \quad 2 + 2n$,
- $T^{av}_{such}(n) = Durchschnitt\ von\ \{T_{such}(o,\ e)\ |Größe\ von\ (o,e) = n\}$

$$= 2 + \frac{\sum^{n}_{i=1} 2i}{n} \quad = 2 + \quad \frac{2(n+1)n}{2\ n} \quad = 2 + (n+1)$$

wenn man das arithmetische Mittel als Durchschnitt wählt.

- $T^{b}_{such}(n) = \min\{T_{such}(o,\ e)\ |Größe\ von\ (o,e) = n\} = 2 + 1$
- $S^{w}_{such}(n) = S^{av}_{such}(n) = S^{b}_{such}(n) = 5$

Beispiele für den Zeit- und Speicherplatzbedarf einer Methode

Beispiel: Binäre Suche in geordneter Reihung (Zeitberechnung nach **Anzahl der Vergleiche**)

```
class SearchArray
{  char[] arr; ...
   boolean binSuch(char e)
   {   int left = 0;
       int right = this.arr.length - 1;
       int mid;
       boolean found = false;

       while ((left <= right) & !found) {
         mid = (left + right) / 2;
         if (e < this.arr[mid]) right = mid - 1;
         else if (e > this.arr[mid]) left = mid + 1; )
         else found = true;
         }
         return found;
    }
 }
```

$T_{binSuch}(this,e) \leq$

0 // Vorbesetzung

$1 + \lceil \log_2 arr.length \rceil *$ (1 //Bedingung

+ 2 //2mal Bedingung

0 // Kosten von **return**

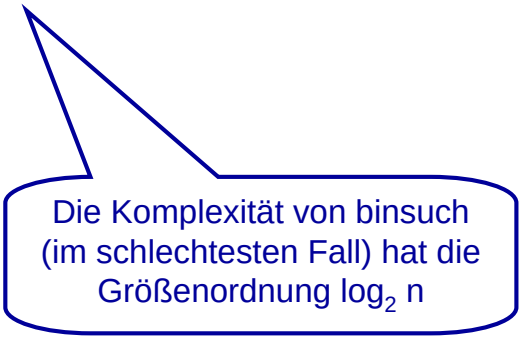
$= 0 + 1 + 3 \lceil \log_2 arr.length \rceil$

$S_{binSuch}(this,e) = 3+4$ // Kosten der Parameter- und Ergebnisübergabe und der lokalen Variablen

Beispiele für den Zeit- und Speicherplatzbedarf des Rumpfs einer Methode

Binäre Suche Fortsetzung:

- $T^w_{binSuch}(n) = max\{T_{binSuch}(this,e) \mid \text{Größe von } this.arr = n\}$
  $= 1 + 3 \lceil \log_2 (n) \rceil$



Größenordnung der Komplexität: Die O-Notation

Die Komplexität $T(n)$ bzw. $S(n)$ wird häufig
nur bis auf konstante Faktoren
untersucht.

Dazu ordnen wir den Aufwandsfunktionen $T(n)$ und $S(n)$ bestimmte Funktionsklassen ihrer „Größenordnung“ zu.

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Wir definieren $O(f(n))$ als
Klasse aller Funktionen, die höchstens so schnell wachsen wie f(n) :

$O(f(n)) =$
$\{g(n) \mid$ es gibt $c>0$, n_0: $0 \le g(n) \le c*f(n)$ für alle $n \ge n_0\}$

$h(n) \in O(f(n))$ bedeutet also, daß h höchstens so schnell wächst wie f (modulo linearer Transformation).

Größenordnung der Komplexität: Die O-Notation

Beispiele:

$T^w_{binSuch}(n) \in O(\log_2 n)$	logarithmisch,
$S^w_{binSuch}(n) \in O(1)$	konstant
$T^w_{such}(n) \in O(n)$	linear,
$S^w_{such}(n) \in O(1)$	konstant

Größenordnung der Komplexität: Die O-Notation

Satz. Seien $c, c_0, \ldots, c_k > 0$ Konstanten, $h(n) \in O(f(n))$. Dann gilt:

1. Multiplikation mit konstantem Faktor und Addition oder Subtraktion von Konstanten ändern nichts an der Größenordnung:

   $c * h(n), c + h(n), h(n) - c \in O(f(n))$

2. Die höchste Potenz bestimmt die Größenordnung eines Polynoms:

   $c_k * n^k + \ldots + c_1 * n + c_0 \in O(n^k)$

3. O ist transitiv: für alle $f(n), g(n), h(n)$ gilt:

   Wenn $f(n) \in O(g(n))$ und $g(n) \in O(h(n))$,
   so ist $f(n) \in O(h(n))$

Größenordnung der Komplexität: Die *O* -Notation

Außerdem gilt:

- Die Hintereinanderausführung zweier Anweisungen mit linearer Zeitkomplexität ist linear:

  Wenn `for(int i=0; i < a.length; i++) S1;` linear und
  `for(int k=0; k < b.length; k++) S2;` linear
  dann
  `for(int i=0; i<a.length; i++) S1; for(int k=0; k<b.length; k++) S2;` linear.

- Die Zeitkomplexität zweier verschachtelter Schleifen mit linearer Zeitkomplexität ist quadratisch:

  Wenn `i=0; i < a.length, i++, k=0, k < a.length, k++, S` zusammen konstante Zeitkomplexität (>0) besitzen,
  dann hat

```
for(int i=0; i < a.length; i++)
    for(int k=0; k < a.length; k++) S;
```

  quadratische Zeitkomplexität.

Komplexitätsklassen

Man nennt *f*

konstant	falls	$f \in O(1)$
logarithmisch	falls	$f \in O(\log_2 n)$
linear	falls	$f \in O(n)$
quadratisch	falls	$f \in O(n^2)$
polynomial	falls	$f \in O(n^k)$ für ein $k \geq 0$
exponentiell	falls	$f \in O(k^n)$ für ein $k \geq 2$

wobei $O(1) < O(\log_2(n)) < O(n) < O(n^2) < O(n^k) < O(2^n)$

Häufig auftretende Komplexitäten

f(n)		f(10)	f(100)	f(1000)	$f(10^4)$
1	konstant	1	1	1	1
$\log_2(n)$	logarithm.	3	7	10	13
n	linear	10	100	1000	10^4
$n*\log_2(n)$		30	700	10^4	10^5
n^2	quadratisch	100	10^4	10^6	10^8
n^3	kubisch	1000	10^6	10^9	10^{12}
2^n	exponentiell	1000	10^{30}	10^{300}	10^{3000}

Exponentielle und polynomiale Zeitkomplexität

Für folgendes Problem des „**Handelsreisenden**“ (engl. Traveling Salesman) sind nur Algorithmen mit exponentieller Zeitkomplexität bekannt:

Gegeben sei ein Graph mit n Städten und den jeweiligen Entfernungen sowie eine Entfernung *B*. Gibt es eine Tour der Länge $\leq$ *B* durch alle Städte, so daß jede Stadt einmal besucht wird?

Bemerkung:

Für das Traveling-Salesman-Problem gibt es einen **nichtdeterministisch-polynominalen** (**NP**) Algorithmus („man darf die richtige Lösung raten“).

Das Traveling-Salesman-Problem ist **NP-vollständig**, d.h. falls es einen polynomialen Algorithmus zu seiner Lösung gibt, so hat jeder nichtdeterministisch-polynomiale Algorithmus eine polynomiale Lösung.

Exponentielle und polynomiale Zeitkomplexität

Algorithmen mit **polynomialer** Komplexität nennt man **praktisch berechenbar**, während **exponentielle** Algorithmen **nicht** (mehr) praktisch berechenbar sind.
(Grund: bei Vergrößerung der Eingabe um 1 vervielfacht sich der Aufwand.)

Die Klasse der **nichtdeterministisch-polynomialen** Algorithmen (bzgl. der Zeitkomplexität) nennt man **NP**.

Die Klasse der **polynomialen** Algorithmen (bzgl. der Zeitkomplexität) nennt man **P**. Das bekannteste ungelöste Problem der theoretischen Informatik ist:die Frage **„P = NP?“.**

Zusammenfassung

- Der Zeitbedarf einer Anweisung berechnet sich aus der Anzahl der Berechnungsschritte, der Speicherplatzbedarf aus dem Bedarf an lokalen Variablen und (neuen) Objekten.
- Die Zeit- und Speicherplatzkomplexität eines Algorithmus hängt von der Größe der Eingabe ab. Im schlechtesten Fall bildet man das Maximum der Berechnungsschritte für Eingaben gleicher Größe. Analog nimmt man im mittleren Fall den Durchschnitt.
- Speicher- und Zeitkomplexität werden nach ihrer Größenordnung, der *O*-Notation, klassifiziert. Diese hängt im wesentlichen von der Anzahl der nötigen Schleifendurchläufe ab. Geschachtelte Schleifen erhöhen die Komplexität, im Gegensatz zu hintereinander ausgeführten Schleifen.
- Polynomial berechenbare Algorithmen heißen auch praktisch berechenbar (obwohl schon die Komplexität n^3 häufig Probleme bereitet). Exponentielle Algorithmen sind nicht praktisch berechenbar.
- Bis heute offen ist die Frage P=NP: ob nichtdeterministisch polynomiale Algorithmen auch polynomial sind. (Beispiel: Handelsreisender)