Ludwig-Maximilians-Universität München WS 2006/07
Institut für Informatik Blatt 8
Prof. Dr. A. Knapp

Übungen zu Semantik von Programmiersprachen

Aufgabe 29 Scott-Induktion (4 Punkte)

Seien D und E Bereiche. Seien $f : D \to D$, $g : E \to E$ und $h : D \to E$ stetig, sei h strikt und gelte $h \circ f = g \circ h$.

a) Zeigen Sie, daß die Mengen $\{d \in D \mid h(d) \sqsubseteq_E \mathbf{Y}_E\, g\}$ und $\{e \in E \mid e \sqsubseteq_E h(\mathbf{Y}_D f)\}$ zulässig sind.

b) Zeigen Sie, daß gilt: $h(\mathbf{Y}_D\, f) = \mathbf{Y}_E\, g$.

Aufgabe 30 Ausgaben

Sei $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\texttt{abort}\} \times \Sigma$. Sei der Bereich $(\Omega, \sqsubseteq_\Omega)$ gegeben durch $\Omega = \mathbb{Z}^* \cup (\mathbb{Z}^* \times \hat{\Sigma}) \cup \mathbb{Z}^\infty$ und $\omega \sqsubseteq_\Omega \omega' \iff \exists \omega'' \in \Omega \,.\, \omega \circ \omega'' = \omega'$. Sei $f : \Sigma \to \Omega$ eine Funktion. Zeigen Sie, daß $f_* : \Omega \to \Omega$, definiert durch

$$\begin{aligned} f_*\langle v_0, \dots, v_{k-1}\rangle &= \langle v_0, \dots, v_{k-1}\rangle \\ f_*\langle v_0, \dots, v_{k-1}, \sigma\rangle &= \langle v_0, \dots, v_{k-1}\rangle \circ (f\sigma) \\ f_*\langle v_0, \dots, v_{k-1}, (\texttt{abort}, \sigma)\rangle &= \langle v_0, \dots, v_{k-1}, (\texttt{abort}, \sigma)\rangle \\ f_*\langle v_0, v_1, \dots\rangle &= \langle v_0, v_1, \dots\rangle \;, \end{aligned}$$

stetig ist.

Aufgabe 31 Direkte Produkte (4 Punkte)

Seien $P_1, \dots, P_n$ und Q Präbereiche. Seien $f_1 : Q \to P_1, \dots, f_n : Q \to P_n$ stetig.

a) Zeigen Sie, daß $(f_1, \dots, f_n) : Q \to P_1 \times \cdots \times P_n$ stetig ist.

b) Sei $f : Q \to P_1 \times \cdots \times P_n$ stetig mit $\pi_i \circ f = f_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, daß $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Aufgabe 32 Scott-Topologie

Sei X eine Menge. Ein System $\mathscr{X}$ von Teilmengen von X heißt *Topologie* auf X, falls gilt:

1. $\emptyset \in \mathscr{X}$ und $X \in \mathscr{X}$.

2. Für $O_1, O_2 \in \mathscr{X}$ ist $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{X}$.

3. Ist I eine Indexmenge und $O_i \in \mathscr{X}$ für alle $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathscr{X}$.

Die Elemente von $\mathscr{X}$ heißen *offene Mengen* von X bzgl. $\mathscr{X}$. Ein Paar $(X, \mathscr{X})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathscr{X}$ auf X heißt *topologischer Raum*. Sind $(X, \mathscr{X})$ und $(Y, \mathscr{Y})$ topologische Räume, so heißt eine Funktion $f : X \to Y$ *topologisch stetig* bzgl. $\mathscr{X}$ und $\mathscr{Y}$, falls für alle $O \in \mathscr{Y}$ gilt: $f^{-1}(O) \in \mathscr{X}$.

Sei $(P, \sqsubseteq_P)$ ein Präbereich. Eine Teilemenge $O \subseteq P$ heißt *Scott-offen*, falls gilt:

1. Ist $p \in O$ und $p \sqsubseteq_P p'$, so ist $p' \in O$.

2. Ist X eine nicht-leere aufsteigende Kette in P und ist $\bigsqcup X \in O$, so ist $X \cap O \neq \emptyset$.

Mit $\mathscr{O}_P$ werde das System der Scott-offenen Mengen bzgl. $(P, \sqsubseteq_P)$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, daß für jedes $p \in P$ die Menge $O_p = \{p' \in P \mid p' \not\sqsubseteq_P p\}$ Scott-offen ist.

b) Zeigen Sie, daß $(P, \mathscr{O}_P)$ ein topologischer Raum ist.

c) Sei $(Q, \sqsubseteq_Q)$ ein Präbereich. Zeigen Sie, daß eine Funktion $f : P \to Q$ genau dann (bereichstheoretisch) stetig ist, wenn sie topologisch stetig bzgl. $\mathscr{O}_P$ und $\mathscr{O}_Q$ ist.

Abgabe und Besprechung: Freitag, 17.1.2007