IMP: Semantische Äquivalenzen

Arithmetische Ausdrücke $a, a' \in \mathrm{AExp}$

$$a \sim a' \quad \text{gdw.} \quad \forall \sigma \in \Sigma \,.\, \mathcal{A}[\![a]\!]\,\sigma = \mathcal{A}[\![a']\!]\,\sigma$$

Boolesche Ausdrücke $b, b' \in \mathrm{BExp}$

$$b \sim b' \quad \text{gdw.} \quad \forall \sigma \in \Sigma \,.\, \mathcal{B}[\![b]\!]\,\sigma = \mathcal{B}[\![b']\!]\,\sigma$$

Anweisungen $S, S' \in \mathrm{Stm}$

$$S \sim S' \quad \text{gdw.} \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma \,.\, \langle S, \sigma \rangle \to \sigma' \Leftrightarrow \langle S', \sigma \rangle \to \sigma'$$

Wohlfundiertheit

Definition Eine binäre Relation $\prec$ auf einer Menge A heißt wohlfundiert, wenn es keine unendliche absteigende Kette $a_0 \succ a_1 \succ a_2 \succ \cdots$ mit $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ gibt.

Definition Sei $\prec$ eine binäre Relation auf einer Menge A und sei $M \subseteq A$. Ein Element $m \in A$ heißt minimal in M, falls $m \in M$ und für alle $m' \in A$ mit $m' \prec m$ gilt $m' \notin M$.

Satz Sei $\prec$ eine binäre Relation auf einer Menge A. Die Relation $\prec$ ist genau dann wohlfundiert, wenn jede Menge $\emptyset \neq M \subseteq A$ ein minimales Element besitzt.

Noethersche Induktion

Satz Sei $\prec$ eine wohlfundierte Relation auf einer Menge A und sei P eine Eigenschaft über A. Dann gilt

$$\forall a \in A \,.\, P(a) \iff \forall a \in A \,.\, (\forall b \prec a \,.\, P(b)) \Rightarrow P(a)$$

Beispiel Mathematische Induktion

$m \prec n$, falls $n = m + 1$

Beispiel Strukturelle Induktion

$s \prec t$, falls s direkter Teilterm von t

IMP: Freie Variablen

$$\text{fvar} : \text{AExp} \cup \text{BExp} \cup \text{Stm} \to \wp(\text{Var})$$

$$\text{fvar}(n) = \emptyset, \quad \text{für } n \in \text{Num}$$

$$\text{fvar}(x) = \{x\}, \quad \text{für } x \in \text{Var}$$

$$\text{fvar}(a_1\ bop\ a_2) = \text{fvar}(a_1) \cup \text{fvar}(a_2), \quad \text{für } bop \in \{+, -, *\}$$

$$\text{fvar}(nop) = \emptyset, \quad \text{für } nop \in \{\texttt{true}, \texttt{false}\}$$

$$\text{fvar}(a_1\ bop\ a_2) = \text{fvar}(a_1) \cup \text{fvar}(a_2), \quad \text{für } bop \in \{\texttt{=}, \texttt{<=}, \texttt{and}\}$$

$$\text{fvar}(uop\ b) = \text{fvar}(b), \quad \text{für } uop \in \{\texttt{not}\}$$

$$\text{fvar}(\texttt{skip}) = \emptyset$$

$$\text{fvar}(x \texttt{ := } a) = \{x\} \cup \text{fvar}(a)$$

$$\text{fvar}(S_1 \texttt{ ; } S_2) = \text{fvar}(S_1) \cup \text{fvar}(S_2)$$

$$\text{fvar}(\texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2) = \text{fvar}(b) \cup \text{fvar}(S_1) \cup \text{fvar}(S_2)$$

$$\text{fvar}(\texttt{while } b \texttt{ do } S) = \text{fvar}(b) \cup \text{fvar}(S)$$