Wohlfundierte Rekursion

Vorgängerrelation $\quad \prec \subseteq A \times A$, $a \in A$

$$^\bullet{\prec}(\{a\}) = \{a' \in A \mid a' \prec a\}$$

Funktionsrestriktion $\quad f{\restriction}A' : A' \to B$ für $f : A \to B$ und $A' \subseteq A$

$$f{\restriction}A' = \{(a, f(a)) \mid a \in A'\}$$

Satz Sei $\prec$ eine wohlfundierte Relation auf einer Menge A.
Gelte $F(a,h) \in B$ für alle $a \in A$ und alle Funktionen $h : {}^\bullet{\prec}(\{a\}) \to B$.
Dann gibt es genau eine Funktion $f : A \to B$ mit

$$\forall a \in A\,.\, f(a) = F(a, f{\restriction}{}^\bullet{\prec}(\{a\}))$$

Induktive Definitionen

Menge von Regelinstanzen R (X/y), X endlich

- Prämissen X, Konklusion y

Definition Eine Menge Q ist R-abgeschlossen, falls für alle $(X/y) \in R$ gilt: $X \subseteq Q \Rightarrow y \in Q$. Für eine Menge Q setze $\hat{R}(Q) = \{y \mid \exists X \subseteq Q \,.\, (X/y) \in R\}$.

Lemma Eine Menge Q ist genau dann R-abgeschlossen, wenn $\hat{R}(Q) \subseteq Q$.

Satz Setze $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{R}^n(\emptyset)$. Dann gilt:

1. A ist R-abgeschlossen.
2. $\hat{R}(A) = A$.
3. A ist die kleinste R-abgeschlossene Menge.

Ableitungsinduktion

Menge von Regelinstanzen R

Induktive Definition von R-Ableitungen $\quad D_R$

$$(\emptyset/y) \in D_R, \quad \text{falls } (\emptyset/y) \in R$$

$$(\{(D_1/x_1), \ldots, (D_n/x_n)\}/y) \in D_R,$$

$$\text{falls } (\{x_1, \ldots, x_n\}/y) \in R$$
$$\text{und } (D_1/x_1) \in D_R, \ldots, (D_n/x_n) \in D_R$$

- Direkte Teilableitung $\quad d \prec_1 e$, falls $e = (D/y)$ und $d \in D$
- Teilableitung $\quad d \prec e$, falls $d \prec_1^+ e$

$d \Vdash_R y$, falls $d = (D/y) \in D_R$

$\Vdash_R y$, falls $d \Vdash_R y$ für ein $d \in D_R$

IMP: Eigenschaften der natürlichen Semantik

Satz Seien $S \in \mathrm{Stm}$ und $\sigma, \sigma', \sigma'' \in \Sigma$. Gilt $\langle S, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ und $\langle S, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''$, dann ist $\sigma' = \sigma''$.

Satz Seien $S \in \mathrm{Stm}$ und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$. Dann gilt $\langle \texttt{while true do } S, \sigma \rangle \not\rightarrow \sigma'$.