# Regelinduktion

Regelinstanzenmenge $R$ $\quad I_R = \{x \mid \Vdash_R x\}$

**Satz** $I_R$ ist $R$-abgeschlossen; und ist $Q$ eine $R$-abgeschlossene Menge, dann ist $I_R \subseteq Q$.

**Satz** Sei $P$ eine Eigenschaft über $I_R$. Dann gilt $\forall x \in I_R \,.\, P(x)$ genau dann, wenn für alle Regelinstanzen $(X/y) \in R$ mit $X \subseteq I_R$ gilt: $(\forall x \in X \,.\, P(x)) \Rightarrow P(y)$.

**Satz** Sei $Q$ eine Eigenschaft über $A \subseteq I_R$. Dann gilt $\forall a \in A \,.\, Q(a)$ genau dann, wenn für alle Regelinstanzen $(X/y) \in R$ mit $X \subseteq I_R$ und $y \in A$ gilt: $(\forall x \in X \cap A \,.\, Q(x)) \Rightarrow Q(y)$.

# **IMP**: Regelinduktion für Anweisungen

Für eine Eigenschaft $P$ über $\mathrm{Stm} \times \Sigma \times \Sigma$ gilt
$\forall S \in \mathrm{Stm}, \sigma, \sigma' \in \Sigma\,.\, \langle S, \sigma \rangle \to \sigma' \Rightarrow P(S, \sigma, \sigma')$ genau dann, wenn

$$
\begin{aligned}
& \forall \sigma \in \Sigma\,.\, P(\texttt{skip}, \sigma, \sigma) \\
\wedge\ & \forall x \in \mathrm{Var}, a \in \mathrm{AExp}, \sigma \in \Sigma\,.\, P(x \texttt{ := } a, \sigma, \sigma[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]\,\sigma]) \\
\wedge\ & \forall S_1, S_2 \in \mathrm{Stm}, \sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma\,. \\
& \quad \langle S_1, \sigma \rangle \to \sigma_1 \wedge P(S_1, \sigma, \sigma_1) \wedge \langle S_2, \sigma_1 \rangle \to \sigma_2 \wedge P(S_2, \sigma_1, \sigma_2) \Rightarrow P(S_1 \texttt{ ; } S_2, \sigma, \sigma_2) \\
\wedge\ & \forall b \in \mathrm{BExp}, S_1, S_2 \in \mathrm{Stm}, \sigma, \sigma_1 \in \Sigma\,. \\
& \quad \mathcal{B}[\![b]\!]\,\sigma = tt \wedge \langle S_1, \sigma \rangle \to \sigma_1 \wedge P(S_1, \sigma, \sigma_1) \Rightarrow P(\texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2, \sigma, \sigma_1) \\
\wedge\ & \forall b \in \mathrm{BExp}, S_1, S_2 \in \mathrm{Stm}, \sigma, \sigma_2 \in \Sigma\,. \\
& \quad \mathcal{B}[\![b]\!]\,\sigma = \mathit{ff} \wedge \langle S_2, \sigma \rangle \to \sigma_2 \wedge P(S_2, \sigma, \sigma_2) \Rightarrow P(\texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2, \sigma, \sigma_2) \\
\wedge\ & \forall b \in \mathrm{BExp}, S \in \mathrm{Stm}, \sigma \in \Sigma\,.\, \mathcal{B}[\![b]\!]\,\sigma = \mathit{ff} \Rightarrow P(\texttt{while } b \texttt{ do } S, \sigma, \sigma) \\
\wedge\ & \forall b \in \mathrm{BExp}, S \in \mathrm{Stm}, \sigma, \sigma', \sigma'' \in \Sigma\,. \\
& \quad \mathcal{B}[\![b]\!]\,\sigma = tt \wedge \langle S, \sigma \rangle \to \sigma' \wedge P(S, \sigma, \sigma') \wedge \\
& \quad \langle \texttt{while } b \texttt{ do } S, \sigma' \rangle \to \sigma'' \wedge P(\texttt{while } b \texttt{ do } S, \sigma', \sigma'') \Rightarrow \\
& \qquad P(\texttt{while } b \texttt{ do } S, \sigma, \sigma'')
\end{aligned}
$$

# **IMP**: Freie änderbare Variablen

$\text{fvar}_L : \text{Stm} \to \wp\text{Var}$

$$\text{fvar}_L(\texttt{skip}) = \emptyset$$

$$\text{fvar}_L(x \texttt{ := } a) = \{x\}$$

$$\text{fvar}_L(S_1 \texttt{ ; } S_2) = \text{fvar}_L(S_1) \cup \text{fvar}_L(S_2)$$

$$\text{fvar}_L(\texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2) = \text{fvar}_L(S_1) \cup \text{fvar}_L(S_2)$$

$$\text{fvar}_L(\texttt{while } b \texttt{ do } S) = \text{fvar}_L(S)$$

# **IMP**: Strukturell-operationale Semantik

Konfigurationen $\langle S, \sigma \rangle \in \mathbf{Stm} \times \Sigma, \quad \sigma \in \Sigma$

Terminale Konfigurationen $\sigma \in \Sigma$

Transitionen $\langle S, \sigma \rangle \Rightarrow \langle S', \sigma' \rangle, \quad \langle S, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma'$

(skip$_{\text{sos}}$) $\langle \mathtt{skip}, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma$

(assign$_{\text{sos}}$) $\langle x \mathrel{\mathtt{:=}} a, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]\,\sigma]$

(seq$^1_{\text{sos}}$) $$\frac{\langle S_1, \sigma \rangle \Rightarrow \langle S_1', \sigma' \rangle}{\langle S_1 \mathbin{\mathtt{;}} S_2, \sigma \rangle \Rightarrow \langle S_1' \mathbin{\mathtt{;}} S_2, \sigma' \rangle}$$

(seq$^2_{\text{sos}}$) $$\frac{\langle S_1, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma'}{\langle S_1 \mathbin{\mathtt{;}} S_2, \sigma \rangle \Rightarrow \langle S_2, \sigma' \rangle}$$

# **IMP**: Strukturell-operationale Semantik

$(\mathsf{if}^{tt}_{sos})$ $\quad \langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2, \sigma\rangle \Rightarrow \langle S_1, \sigma\rangle, \quad$ falls $\mathcal{B}[\![b]\!]\,\sigma = tt$

$(\mathsf{if}^{ff}_{sos})$ $\quad \langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2, \sigma\rangle \Rightarrow \langle S_2, \sigma\rangle, \quad$ falls $\mathcal{B}[\![b]\!]\,\sigma = ff$

$(\mathsf{while}^{tt}_{sos})$ $\quad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, \sigma\rangle \Rightarrow \langle S\ \texttt{;}\ \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, \sigma\rangle, \quad$ falls $\mathcal{B}[\![b]\!]\,\sigma = tt$

$(\mathsf{while}^{ff}_{sos})$ $\quad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, \sigma\rangle \Rightarrow \sigma, \quad$ falls $\mathcal{B}[\![b]\!]\,\sigma = ff$

# **IMP**: Ableitungen in der strukturell-operationalen Semantik

Endliche Ableitung $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \qquad \gamma_0 \Rightarrow^* \gamma_k$

- $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$ für $0 \leq i < k$ und $\gamma_k$ terminal oder festgefahren

Unendliche Ableitung $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \qquad \gamma_0\uparrow$

- $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$ für $i \geq 0$

Semantische Äquivalenz für Anweisungen $S, S' \in \mathrm{Stm}$

- $\langle S, \sigma \rangle \Rightarrow^* \gamma \Leftrightarrow \langle S', \sigma \rangle \Rightarrow^* \gamma$ für alle $\sigma \in \Sigma$ und terminale oder festgefahrene $\gamma$;
- $\langle S, \sigma \rangle\uparrow \Leftrightarrow \langle S', \sigma \rangle\uparrow$ für alle $\sigma \in \Sigma$

# **IMP**: Äquivalenz von natürlicher und strukturell-operationaler Semantik

**Satz** Seien $S \in \mathrm{Stm}$ und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$. Dann gilt

$$\langle S, \sigma \rangle \to \sigma' \quad \iff \quad \langle S, \sigma \rangle \Rightarrow^* \sigma' .$$