Vertauschbarkeit von Suprema

Lemma Seien P ein Präbereich und $(p_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ Elemente in P mit $p_{m,n} \sqsubseteq_P p_{m',n'}$, falls $m \leq m'$ und $n \leq n'$. Dann existiert das Supremum der Menge $\{p_{m,n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ und es gilt

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\bigsqcup_P \{p_{m,n} \mid m, n \in \mathbb{N}\} = \\
&\qquad \textstyle\bigsqcup_P \{\bigsqcup_P \{p_{m,n} \mid n \in \mathbb{N}\} \mid m \in \mathbb{N}\} = \\
&\qquad \textstyle\bigsqcup_P \{\bigsqcup_P \{p_{m,n} \mid m \in \mathbb{N}\} \mid n \in \mathbb{N}\} = \\
&\qquad \textstyle\bigsqcup_P \{p_{n,n} \mid n \in \mathbb{N}\} \; .
\end{aligned}
$$

Monotone und stetige Funktionen auf Präbereichen

Definition Seien P und Q Präbereiche.
Eine Funktion $f : P \to Q$ heißt monoton, falls für alle $p, p' \in P$ mit $p \sqsubseteq_P p'$ gilt, daß $f(p) \sqsubseteq_Q f(p')$ ist.
Eine Funktion $f : P \to Q$ heißt stetig, falls für alle ω-Ketten $p_0 \sqsubseteq_P p_1 \sqsubseteq_P p_2 \sqsubseteq_P \ldots$ in P gilt:

$$f(\bigsqcup_P \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \bigsqcup_Q \{f(p_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Lemma Seien P, Q Präbereiche und $f : P \to Q$ eine monotone Funktion. Dann ist f genau dann stetig, wenn für alle ω-Ketten $p_0 \sqsubseteq_P p_1 \sqsubseteq_P p_2 \sqsubseteq_P \ldots$ in P gilt:

$$f(\bigsqcup_P \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \sqsubseteq_Q \bigsqcup_Q \{f(p_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Funktionsbereiche

Definition Seien P, Q Präbereiche. Dann bezeichnet $[P \to Q]$ die partiell geordnete Menge der stetigen Funktionen von P nach Q mit der punktweisen Ordnung:

$$f \sqsubseteq_{[P \to Q]} g \quad \iff \quad \forall p \in P\,.\, f(p) \sqsubseteq g(p)$$

Lemma Seien P, Q Präbereiche. Dann ist $[P \to Q]$ ein Präbereich und das Supremum einer ω-Kette $f_0 \sqsubseteq_{[P \to Q]} f_1 \sqsubseteq_{[P \to Q]} f_2 \sqsubseteq_{[P \to Q]} \dots$ in $[P \to Q]$ ist gegeben durch

$$(\bigsqcup_{[P \to Q]} \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})(p) = \bigsqcup_Q \{f_n(p) \mid n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Ist Q ein Bereich, so ist $[P \to Q]$ ein Bereich mit dem kleinsten Element $\bot_{[P \to Q]}$ definiert durch $\bot_{[P \to Q]}(p) = \bot_Q$ für alle $p \in P$.

Stetige Funktionen

Sind P und Q Präbereiche und P diskret, so ist $[P \to Q] \cong P \to Q$.

Ist P ein diskreter Präbereich, so ist $[P \to P_\perp] \cong P \rightharpoonup P$.

P, Q, R Präbereiche

1. Jede konstante Funktion $f : P \to Q$ ist stetig.
2. Die Identitätsfunktion $\mathrm{id} : P \to P$ ist stetig.
3. Sind $f : P \to Q$ und $g : Q \to R$ stetig, dann ist $g \circ f : P \to R$ stetig.
4. Ist $f : P \to Q$ eine stetige Funktion, dann ist $- \circ f : [Q \to R] \to [P \to R]$ stetig.
5. Ist $g : Q \to R$ eine stetige Funktion, dann ist $g \circ - : [P \to Q] \to [P \to R]$ stetig.

Fallunterscheidung

Sei P ein Präbereich und D ein Bereich. Sei
$\mathrm{ite} : [P \to \mathbb{B}] \to [P \to D] \to [P \to D] \to (P \to D)$ definiert durch:

$$\mathrm{ite}(b, f, g)(p) = \begin{cases} f(p), & \text{falls } b(p) = tt \\ g(p), & \text{falls } b(p) = ff \end{cases}$$

Dann ist $\mathrm{ite}(b, f, g)$ für alle $b \in [P \to \mathbb{B}]$, $f, g \in [P \to D]$ eine stetige Funktion von P nach D.
Weiter sind für $b \in [P \to \mathbb{B}]$ und $f, g \in [P \to D]$

$$\mathrm{ite}(b, -, g) : [P \to D] \to [P \to D]$$
$$\mathrm{ite}(b, f, -) : [P \to D] \to [P \to D]$$

stetige Funktionen.

Strikte Funktionen

Definition Seien D und D' Bereiche. Eine Funktion $f : D \to D'$ heißt strikt, falls $f(\bot_D) = \bot_{D'}$.

Definition Seien P, Q Präbereiche und $f : P \to Q$. Dann ist die strikte Hebung $f_\bot : P_\bot \to Q_\bot$ definiert durch

$$f_\bot(x) = \begin{cases} \bot_{Q_\bot}, & \text{falls } x = \bot_{P_\bot} \\ f(x), & \text{sonst} \end{cases} .$$

Definition Seien P ein Präbereich, D ein Bereich und $f : P \to D$. Dann ist die strikte Quellhebung $f_{\bot\!\!\bot} : P_\bot \to D$ definiert durch

$$f_{\bot\!\!\bot}(x) = \begin{cases} \bot_D, & \text{falls } x = \bot_{P_\bot} \\ f(x), & \text{sonst} \end{cases} .$$

Fixpunktsatz von Kleene

Satz Seien D ein Bereich und $f : D \to D$ stetig. Dann ist

$$\mathbf{Y}_D f = \bigsqcup_D \{f^n(\bot_D) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

der kleinste Fixpunkt von f.

IMP: Denotationelle Semantik von Anweisungen

Semantische Funktion $\mathcal{S}[\![-]\!] : \mathrm{Stm} \to [\Sigma \to \Sigma_\perp]$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{S}[\![\texttt{skip}]\!] = \mathrm{id}\\
&\mathcal{S}[\![x \texttt{ := } a]\!] = \lambda\sigma\,.\,\sigma[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]\,\sigma]\\
&\mathcal{S}[\![S_1 \texttt{ ; } S_2]\!] = \mathcal{S}[\![S_2]\!]_{\perp\!\!\perp} \circ \mathcal{S}[\![S_1]\!]\\
&\mathcal{S}[\![\texttt{if } b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2]\!] = \mathrm{ite}(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}[\![S_1]\!], \mathcal{S}[\![S_2]\!])\\
&\mathcal{S}[\![\texttt{while } b \texttt{ do } S]\!] = \mathbf{Y}_{[\Sigma\to\Sigma_\perp]}(\lambda f\,.\,\mathrm{ite}(\mathcal{B}[\![b]\!], f_{\perp\!\!\perp} \circ \mathcal{S}[\![S]\!], \mathrm{id}))
\end{aligned}
$$