Zulässige Eigenschaften und Scott-Induktion

Definition Sei P ein Präbereich. Eine Menge $X \subseteq P$ heißt **zulässig** (in P), falls $\bigsqcup_P Y \in X$ für alle ω-Ketten Y in X.

Satz Seien P und Q Präbereiche und $f, g \in [P \to Q]$.

1. Die Menge $\{p \in P \mid f\,p \sqsubseteq_Q g\,p\}$ ist zulässig in P.
2. Sind X und X' zulässig in P, so auch $X \cap X'$.

Satz Seien D ein Bereich, $f \in [D \to D]$ und X zulässig in D. Gilt $\perp_D \in X$ und $f(d) \in X$, falls $d \in X$, so auch $\mathbf{Y}_D f \in X$.

Vollständige Verbände

Definition Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und sei $X \subseteq P$. Ein $p \in P$ heißt untere Schranke von X, falls $p \sqsubseteq q$ für alle $q \in X$. Ein $p \in P$ heißt größte untere Schranke (oder Infimum) von X, falls p eine untere Schranke von X ist und für alle unteren Schranken p' von X gilt: $p' \sqsubseteq p$.

Schreibweisen: $\bigsqcap X$ größte untere Schranke von X, falls existent

$$\bigsqcap\{p_1, \ldots, p_n\} = p_1 \sqcap \cdots \sqcap p_n$$

Definition Eine partielle Ordnung $(L, \sqsubseteq)$ heißt vollständiger Verband, wenn jede Teilmenge von L eine größte untere Schranke besitzt.

Fixpunktsatz von Knaster und Tarski

Definition Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und $f : P \to P$. Ein Element $p \in P$ heißt Präfixpunkt von f, falls $f(p) \sqsubseteq p$; ein Element $p \in P$ heißt Postfixpunkt von f, falls $p \sqsubseteq f(p)$.

Satz Seien $(L, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $f : L \to L$ monoton. Setze

$$m = \bigsqcap \{x \in L \mid f(x) \sqsubseteq x\} \ ,$$
$$M = \bigsqcup \{x \in L \mid x \sqsubseteq f(x)\} \ .$$

Dann sind m und M Fixpunkte von f; m ist der kleinste Präfixpunkt von f, M der größte Postfixpunkt von f.

IMP: Variablendeklarationen

$$S \in \mathbf{Stm} ::= \ldots \mid \texttt{newvar}\ x\ \texttt{:=}\ a\ \texttt{in}\ S$$

Denotationelle Semantik

$$\mathcal{S}[\![\texttt{newvar}\ x\ \texttt{:=}\ a\ \texttt{in}\ S]\!]\ \sigma = \\ (\lambda\sigma' \in \Sigma\,.\,\sigma'[x \mapsto \sigma(x)])_{\perp\!\!\perp}(\mathcal{S}[\![S]\!](\sigma[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]\ \sigma]))$$

Freie Variablen

$$\mathrm{fvar}(\texttt{newvar}\ x\ \texttt{:=}\ a\ \texttt{in}\ S) = (\mathrm{fvar}(S) \setminus \{x\}) \cup \mathrm{fvar}(a)$$

Freie änderbare Variablen

$$\mathrm{fvar}_L(\texttt{newvar}\ x\ \texttt{:=}\ a\ \texttt{in}\ S) = \mathrm{fvar}_L(S) \setminus \{x\}$$

IMP: Koinzidenz- und Umbenennungslemmata

Lemma Seien $S \in \mathrm{Stm}$ und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$.

1. Gilt $\sigma x = \sigma' x$ für alle $x \in \mathrm{fvar}(S)$, dann ist entweder $\mathcal{S}[\![S]\!]\,\sigma = \bot = \mathcal{S}[\![S]\!]\,\sigma'$ oder es gilt $(\mathcal{S}[\![S]\!]\,\sigma)x = (\mathcal{S}[\![S]\!]\,\sigma')x$ für alle $x \in \mathrm{fvar}(S)$.
2. Ist $\mathcal{S}[\![S]\!]\,\sigma \neq \bot$, dann ist $(\mathcal{S}[\![S]\!]\,\sigma)x = \sigma x$ für alle $x \notin \mathrm{fvar}_L(S)$.

Lemma Seien $S \in \mathrm{Stm}$, $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, δ eine Variablenumbenennung und $V \subseteq \mathrm{Var}$ mit $\mathrm{fvar}(S) \subseteq V$ und $\delta(x) \neq \delta(x')$ für $x \neq x' \in V$.

Gilt $\sigma(x) = \sigma'(\delta(x))$ für alle $x \in V$, dann ist entweder $\mathcal{S}[\![S/\delta]\!]\,\sigma' = \bot = \mathcal{S}[\![S]\!]\,\sigma$ oder es gilt $(\mathcal{S}[\![S/\delta]\!]\,\sigma')(\delta(x)) = (\mathcal{S}[\![S]\!]\,\sigma)x$ für alle $x \in V$.

IMP: Abbruch

$$S \in \mathrm{Stm} ::= \ldots \mid \texttt{newvar}\ x \texttt{ := } a \texttt{ in } S \mid \texttt{abort}$$

Erweiterter semantischer Bereich $\quad \hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\texttt{abort}\} \times \Sigma$

Erweiterte denotationelle Semantik $\quad \mathcal{S}[\![-]\!] : \mathrm{Stm} \to [\Sigma \to \hat{\Sigma}_\perp]$

Funktionserweiterungen für $f : \Sigma \to \hat{\Sigma}_\perp$

$$f_* : \hat{\Sigma}_\perp \to \hat{\Sigma}_\perp \qquad f_*\perp = \perp, \quad f_*\sigma = f\sigma, \quad f_*(\texttt{abort}, \sigma) = (\texttt{abort}, \sigma)$$

$$f_\dagger : \hat{\Sigma}_\perp \to \hat{\Sigma}_\perp \qquad f_\dagger\perp = \perp, \quad f_\dagger\sigma = f\sigma, \quad f_\dagger(\texttt{abort}, \sigma) = (\texttt{abort}, f\sigma)$$

$$\mathcal{S}[\![\texttt{abort}]\!] = \lambda\sigma\,.\,(\texttt{abort}, \sigma)$$

$$\mathcal{S}[\![S_1\ \texttt{;}\ S_2]\!] = \mathcal{S}[\![S_2]\!]_* \circ \mathcal{S}[\![S_1]\!]$$

$$\mathcal{S}[\![\texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S]\!] = \mathbf{Y}_{[\Sigma \to \hat{\Sigma}_\perp]}(\lambda f\,.\,\mathrm{ite}(\mathcal{B}[\![b]\!], f_* \circ \mathcal{S}[\![S]\!], \mathrm{id}))$$

$$\mathcal{S}[\![\texttt{newvar}\ x \texttt{ := } a \texttt{ in } S]\!] =$$

$$\lambda\sigma\,.\,(\lambda\sigma' \in \Sigma\,.\,\sigma'[x \mapsto \sigma(x)])_\dagger(\mathcal{S}[\![S]\!](\sigma[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]\,\sigma]))$$

IMP: Ausgaben

$$S \in \mathbf{Stm} ::= \ldots \mid \texttt{newvar}\, x \texttt{ := } a \texttt{ in } S \mid \texttt{abort} \mid \texttt{out}\ a$$

Erweiterter semantischer Bereich

$$\Omega = \mathbb{Z}^* \cup (\mathbb{Z}^* \times \hat{\Sigma}) \cup \mathbb{Z}^\infty$$
$$\omega \sqsubseteq \omega' \iff \exists \omega'' \in \Omega \,.\, \omega \circ \omega'' = \omega'$$

Injektionen

$$\begin{aligned}
\iota_\perp &: \{\langle\rangle\} \to \Omega & \iota_\perp \langle\rangle &= \langle\rangle = \perp_\Omega \\
\iota_{\text{term}} &: \Sigma \to \Omega & \iota_{\text{term}} \sigma &= \langle \sigma \rangle \\
\iota_{\text{abort}} &: \Sigma \to \Omega & \iota_{\text{abort}} \sigma &= \langle (\texttt{abort}, \sigma) \rangle \\
\iota_{\text{out}} &: \mathbb{Z} \times \Omega \to \Omega & \iota_{\text{out}}(n, \omega) &= \langle n \rangle \circ \omega
\end{aligned}$$

IMP: Ausgaben

Funktionserweiterung $\quad f : \Sigma \to \Omega \quad$ zu $\quad f_* : \Omega \to \Omega$

$$
\begin{aligned}
f_*\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle &= \langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle \\
f_*\langle n_0, \ldots, n_{k-1}, \sigma\rangle &= \langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle \circ (f\,\sigma) \\
f_*\langle n_0, \ldots, n_{k-1}, (\texttt{abort}, \sigma)\rangle &= \langle n_0, \ldots, n_{k-1}, (\texttt{abort}, \sigma)\rangle \\
f_*\langle n_0, n_1, \ldots\rangle &= \langle n_0, n_1, \ldots\rangle
\end{aligned}
$$

Funktionserweiterung $\quad f : \Sigma \to \Sigma \quad$ zu $\quad f_\dagger : \Omega \to \Omega$

$$
\begin{aligned}
f_\dagger\,\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle &= \langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle \\
f_\dagger\,\langle n_0, \ldots, n_{k-1}, \sigma\rangle &= \langle n_0, \ldots, n_{k-1}, f\,\sigma\rangle \\
f_\dagger\,\langle n_0, \ldots, n_{k-1}, (\texttt{abort}, \sigma)\rangle &= \langle n_0, \ldots, n_{k-1}, (\texttt{abort}, f\,\sigma)\rangle \\
f_\dagger\,\langle n_0, n_1, \ldots\rangle &= \langle n_0, n_1, \ldots\rangle
\end{aligned}
$$

IMP: Ausgaben

$$S \in \mathbf{Stm} ::= \ldots \mid \texttt{newvar}\ x \texttt{ := } a \texttt{ in } S \mid \texttt{abort} \mid \texttt{out}\ a$$

Semantische Funktion $\mathcal{S}[\![-]\!] : \mathbf{Stm} \to [\Sigma \to \Omega]$

$$\mathcal{S}[\![\texttt{skip}]\!] = \iota_{\text{term}}$$

$$\mathcal{S}[\![x \texttt{ := } a]\!] = \lambda\sigma\,.\,\iota_{\text{term}}\sigma[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]\,\sigma]$$

$$\mathcal{S}[\![S_1 \texttt{ ; } S_2]\!] = \mathcal{S}[\![S_2]\!]_* \circ \mathcal{S}[\![S_1]\!]$$

$$\mathcal{S}[\![\texttt{if}\ b \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2]\!] = \mathrm{ite}(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}[\![S_1]\!], \mathcal{S}[\![S_2]\!])$$

$$\mathcal{S}[\![\texttt{while}\ b \texttt{ do } S]\!] = \mathbf{Y}_{[\Sigma\to\Omega]}(\lambda f\,.\,\mathrm{ite}(\mathcal{B}[\![b]\!], f_* \circ \mathcal{S}[\![S]\!], \iota_{\text{term}}))$$

$$\mathcal{S}[\![\texttt{newvar}\ x \texttt{ := } a \texttt{ in } S]\!] = \lambda\sigma\,.\,(\lambda\sigma' \in \Sigma\,.\,\sigma'[x \mapsto \sigma(x)])_\dagger(\mathcal{S}[\![S]\!](\sigma[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]\,\sigma]))$$

$$\mathcal{S}[\![\texttt{out}\ a]\!] = \lambda\sigma\,.\,\iota_{\text{out}}(\mathcal{A}[\![a]\!]\,\sigma, \iota_{\text{term}}\sigma)$$