Direktes Produkt

$P_1, \ldots, P_n$ Präbereiche

Direktes Produkt $\quad P_1 \times \cdots \times P_n \qquad (\prod_{1 \leq i \leq n} P_i)$

- Elemente $\quad \{(p_1, \ldots, p_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n \,.\, p_i \in P_i\}$
- Ordnung $\quad (p_1, \ldots, p_n) \sqsubseteq_{P_1 \times \cdots \times P_n} (p'_1, \ldots, p'_n)$, falls $p_i \sqsubseteq_{P_i} p'_i$ für alle $1 \leq i \leq n$

Projektionen (stetig)

- $\pi_i : P_1 \times \cdots \times P_n \to P_i, \quad \pi_i\,(p_1, \ldots, p_n) = p_i$

Fortsetzung auf Funktionen $\quad f_1 : Q \to P_1, \ldots, f_n : Q \to P_n$ stetig

- $(f_1, \ldots, f_n) : Q \to P_1 \times \cdots \times P_n, \quad (f_1, \ldots, f_n)\,q = (f_1\,q, \ldots, f_n\,q)$
- Universelle Eigenschaft $\quad \pi_i \circ (f_1, \ldots, f_n) = f_i$

Direktes Produkt

Lemma Seien Q, $P_1, \ldots, P_n$ Präbereiche und $f : Q \to P_1 \times \cdots \times P_n$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig, wenn für alle $1 \leq i \leq n$ die Funktionen $\pi_i \circ f : Q \to P_i$ stetig sind.

Lemma Seien Q, $P_1, \ldots, P_n$ Präbereiche und $f : P_1 \times \cdots \times P_n \to Q$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig, wenn f in jedem Argument stetig ist; d. h., wenn für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n$ die Funktionen $P_i \to Q$ mit $p_i \mapsto f(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n)$ stetig sind.

Direkte Summe

$P_1, \ldots, P_n$ Präbereiche

Direkte Summe $\quad P_1 + \cdots + P_n \qquad (\sum_{1 \leq i \leq n} P_i)$

- Elemente $\quad \{(i, p_i) \mid 1 \leq i \leq n \wedge p_i \in P_i\}$
- Ordnung $\quad (i, p_i) \sqsubseteq_{P_1 + \cdots + P_n} (j, p'_j)$, falls $i = j$ und $p_i \sqsubseteq_{P_i} p'_j$

Injektionen $\qquad$ (stetig)

- $\iota_i : P_i \to P_1 + \cdots + P_n, \quad \iota_i\, p_i = (i, p_i)$

Fortsetzung auf Funktionen $\quad f_1 : P_1 \to Q, \ldots, f_n : P_n \to Q$ stetig

- $[f_1, \ldots, f_n] : P_1 + \cdots + P_n \to Q, \quad [f_1, \ldots, f_n](i, p_i) = f_i\, p_i$
- Universelle Eigenschaft $\quad [f_1, \ldots, f_n] \circ \iota_i = f_i$

Funktionenraum

P, Q Präbereiche

Funktionenraum $\quad [P \to Q]$

- Elemente $\quad$ stetige Funktionen von P nach Q
- Ordnung $\quad f \sqsubseteq_{[P \to Q]} g$, falls $\forall p \in P \,.\, f\, p \sqsubseteq_Q g\, p$

Funktionsapplikation $\qquad$ (stetig)

- $\mathrm{apply} : [P \to Q] \times P \to Q, \quad \mathrm{apply}(f, p) = f\, p$

Fortsetzung auf Funktionen (Currying) $\quad f : R \times P \to Q$ stetig

- $\mathrm{curry}(f) : R \to [P \to Q], \quad \mathrm{curry}(f)\, r\, p = f(r, p)$
- Universelle Eigenschaft $\quad \mathrm{apply}(\mathrm{curry}(f)\, r, p) = f(r, p)$

Hebung

P Präbereich

Hebung $\quad P_\perp$

- Elemente $\quad P \uplus \{\perp\}$
- Ordnung $\quad p \sqsubseteq_{P_\perp} q$, falls $p \sqsubseteq_P q$ oder $p = \perp$

Einbettung (stetig)

- $\lfloor - \rfloor : P \to P_\perp, \quad \lfloor p \rfloor = p$

Fortsetzung auf Funktionen $\quad f : P \to Q$ stetig für Q Bereich

- $f_{\perp\!\!\!\perp} : P_\perp \to Q, \quad f_{\perp\!\!\!\perp}(\perp) = \perp_Q,\ f_{\perp\!\!\!\perp}(p) = f(p)$
- Universelle Eigenschaft $\quad f_{\perp\!\!\!\perp}\, \lfloor p \rfloor = f\, p$

Isomorphie von Bereichen

Definition Zwei Bereiche D und E heißen isomorph, $D \cong E$, falls es stetige Funktionen $\varphi : D \to E$ und $\psi : E \to D$ gibt, sodaß gilt: $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_D$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$.

Striktes Produkt

$D_1, \ldots, D_n$ Bereiche

Striktes Produkt $\quad D_1 \otimes \cdots \otimes D_n \qquad (\bigotimes_{1 \leq i \leq n} D_i)$

- Elemente
  $\{(d_1, \ldots, d_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n \,.\, \bot_{D_i} \neq d_i \in D_i\} \cup \{(\bot_{D_1}, \ldots, \bot_{D_n})\}$
- Ordnung $\quad (d_1, \ldots, d_n) \sqsubseteq_{D_1 \otimes \cdots \otimes D_n} (d_1', \ldots, d_n')$, falls $d_i \sqsubseteq_{D_i} d_i'$ für alle $1 \leq i \leq n$

Projektionen (stetig, strikt)

- $\pi_i : D_1 \otimes \cdots \otimes D_n \to D_i, \quad \pi_i\,(d_1, \ldots, d_n) = d_i$

Strikte Summe

$D_1, \ldots, D_n$ Bereiche

Strikte Summe $\quad D_1 \oplus \cdots \oplus D_n \qquad (\bigoplus_{1 \leq i \leq n} D_i)$

- Elemente $\quad \{(i, d_i) \mid 1 \leq i \leq n \land \bot_{D_i} \neq d_i \in D_i\} \cup \{\bot\}$
- Ordnung $\quad (i, d_i) \sqsubseteq_{D_1 \oplus \cdots \oplus D_n} (j, d'_j)$, falls $i = j$ und $d_i \sqsubseteq_{D_i} d'_j$,
  $\bot \sqsubseteq_{D_1 \oplus \cdots \oplus D_n} (i, d_i)$

Injektionen (stetig, strikt)

- $\iota_i : D_i \to D_1 \oplus \cdots \oplus D_n, \quad \iota_i \bot_{D_i} = \bot,\ \iota_i\, d_i = (i, d_i) \ \ (d_i \neq \bot_{D_i})$

Strikter Funktionenraum

D, E Bereiche

Strikter Funktionenraum $[D \to_\perp E]$

- Elemente stetige, strikte Funktionen von D nach E
- Ordnung $f \sqsubseteq_{[D \to_\perp E]} g$, falls $\forall d \in D \,.\, f\,d \sqsubseteq_E g\,d$

Funktionsapplikation (stetig, strikt)

- $\text{apply} : [D \to_\perp E] \otimes D \to E, \quad \text{apply}(f, d) = f\,d$