IMP/ASSN: Korrektheit des Hoare-Kalküls für partielle Korrektheit

Satz Für eine partielle Korrektheitsaussage $\{A\}\, S\, \{A'\}$ gilt

$$\vdash \{A\}\, S\, \{A'\} \quad \Rightarrow \quad \models \{A\}\, S\, \{A'\}\ .$$

IMP/ASSN: Schwächste liberale Vorbedingung

Extension $A \in \mathrm{Frm}$

$$\mathrm{ext}^I(A) = \{\sigma \in \Sigma \mid I, \sigma \models A\}$$

Lemma Seien $I \in \mathit{Val}$, $A, A' \in \mathrm{Frm}$. Dann gilt

$$I \models A \Rightarrow A' \quad \iff \quad \mathrm{ext}^I(A) \subseteq \mathrm{ext}^I(A') \; .$$

Schwächste liberale Vorbedingung $S \in \mathrm{Stm}$, $A \in \mathrm{Frm}$

$$\mathrm{wlp}^I(S, A) = \{\sigma \in \Sigma \mid I, \mathcal{S}[\![S]\!]\,\sigma \models_{\perp\!\!\perp} A\}$$

Lemma Seien $I \in \mathit{Val}$, $A, A' \in \mathrm{Frm}$ und $S \in \mathrm{Stm}$. Dann gilt

$$I \models \{A\}\, S\, \{A'\} \quad \iff \quad \mathrm{ext}^I(A) \subseteq \mathrm{wlp}^I(S, A') \; .$$

Gödels β-Prädikat

Sei $X \notin \mathrm{flog}(t) \cup \mathrm{flog}(t_0) \cup \mathrm{flog}(t_1)$.

$$\begin{aligned} t = t_0 \bmod t_1 \iff & 0 \leq t_0 \wedge 0 \leq t_1 \wedge \\ & \exists X \,.\, 0 \leq X \wedge X \cdot t_1 \leq t_0 \wedge \\ & \qquad \neg((X+1) \cdot t_1 \leq t_0) \wedge t = t_0 - X \cdot t_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(t_0, t) \iff & 0 \leq t_0 \wedge \exists X \,.\, 0 \leq X \wedge ((t_0 = 2 \cdot X \Rightarrow t = X) \wedge \\ & \qquad (t_0 = 2 \cdot X + 1 \Rightarrow t = 0 - X)) \end{aligned}$$

Gödels β-Prädikat für ganze Zahlen $(X' \neq X)$

$$\beta(t_0, t_1, t_2, t_3) \iff \exists X' \,.\, (X' = t_0 \bmod (1 + (1 + t_2) \cdot t_1) \wedge F(X', t_3))$$

Lemma Sei $\langle v_0, \ldots, v_k \rangle \in \mathbb{Z}^+$. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $0 \leq i \leq k$ und alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $\beta(m, n, i, x) \Leftrightarrow x = v_i$.

IMP/ASSN: Ausdrucksstärke

Lemma Seien $S \in \mathrm{Stm}$ und $A \in \mathrm{Frm}$. Dann existiert ein $w(S, A) \in \mathrm{Frm}$, sodaß gilt:

$$\forall I \in \mathit{Val} \,.\, \mathrm{ext}^I(w(S, A)) = \mathrm{wlp}^I(S, A) \;.$$

Lemma Seien $S \in \mathrm{Stm}$, $A \in \mathrm{Frm}$. Sei $w(S, A) \in \mathrm{Frm}$, sodaß $\mathrm{ext}^I(w(S, A)) = \mathrm{wlp}^I(S, A)$ für alle $I \in \mathit{Val}$. Dann gilt:

$$\vdash \{w(S, A)\}\, S\, \{A\} \;.$$

IMP/ASSN: Relative Vollständigkeit des Hoare-Kalküls für partielle Korrektheit

Satz Für eine partielle Korrektheitsaussage $\{A\}\,S\,\{A'\}$ gilt

$$\models \{A\}\,S\,\{A'\} \quad \Rightarrow \quad \vdash \{A\}\,S\,\{A'\}\ .$$

Korollar Die Menge $\{A \in \mathrm{Frm} \mid \models A\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.