

Temporale Logik und Zustandssysteme

Aufgabe 2-1 Finden Sie den Mörder (5 Punkte)

Tante Agathe wurde in ihrem Haus tot aufgefunden. Nach den bisherigen Ermittlungen gilt folgendes als sicher:

1. Im Haus lebten nur Agathe, ihr Butler und Onkel Charles.
 2. Agathe wurde von einem Hausbewohner getötet.
 3. Wer immer jemanden tötet, hasst sein Opfer.
 4. Der Täter ist niemals reicher als das Opfer.
 5. Charles hasst niemanden, den Agathe hasste.
 6. Agathe hasste alle außer vielleicht den Butler.
 7. Der Butler hasst alle, die nicht reicher als Agathe sind oder die Agathe hasste.
 8. Kein Hausbewohner hasst(e) alle Hausbewohner.
- a) Beschreiben Sie den Stand der Ermittlungen durch eine Menge \mathcal{A} von Formeln von $\mathcal{L}_{\text{PL}}(\mathbf{V})$ mit einer geeigneten Menge \mathbf{V} von atomaren Aussagen. Beschreiben Sie dabei informell die Bedeutung der Aussagen in \mathbf{V} .
- b) Finden Sie den Täter: Zeigen Sie, dass aus \mathcal{A} eine Formel folgt, welche die Person bestimmt, die Tante Agathe tötete.

Aufgabe 2-2 Herleitungen in Σ_{PL} (keine Abgabe)

Leiten Sie folgende Regel bzw. Formel von PL im formalen System Σ_{PL} her. Verwenden Sie dabei lediglich Axiome von Σ_{PL} , den Modus Ponens und selbst hergeleitete Tautologien und Regeln.

- a) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ (“Kettenregel”)
- b) $\text{false} \rightarrow A$ (“ex falsum quod libet”)

Aufgabe 2-3 Herleitungen in Σ_{PL} (4 Punkte)

Leiten Sie die Formel $A \rightarrow A$ in Σ_{PL} her. Verwenden Sie dabei lediglich Axiome von Σ_{PL} und den Modus Ponens.

Aufgabe 2-4 Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit, 1. (5 Punkte)

Analog zur Definition in Aufgabe 1-1 heißt eine Formel A der Logik PL *erfüllbar*, wenn es eine Belegung \mathbf{B} gibt, für die $\models_{\mathbf{B}} A$ gilt. Entscheiden Sie, ob die folgenden Formeln jeweils allgemeingültig, erfüllbar aber nicht allgemeingültig, oder nicht erfüllbar sind. Beweisen Sie Ihre Antworten.

- a) $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$
- b) $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$
- c) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$
- d) $\neg(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg A \wedge \neg B$
- e) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Aufgabe 2-5**Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit, 2.**

(keine Abgabe)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen für die Logik PL:

- a) Falls $\models A \vee B$, so entweder $\models A$ oder $\models B$.
- b) Falls $\models A \wedge B$, so $\models A$ und $\models B$.
- c) Ist $A \rightarrow B$ erfüllbar und B nicht allgemeingültig, so ist A erfüllbar.
- d) A ist allgemeingültig genau dann, wenn $\neg A$ nicht erfüllbar ist.

Abgabe: Mittwoch, den 1.11.2006, vor der Übung.