Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, M. Hammer

WS 2006/2007
Übungsblatt 6

Temporale Logik und Zustandssysteme

Aufgabe 6-1 **Folgerung und Implikation in LTL+p** (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass für LTL+p Folgendes gilt:

$$\mathcal{F} \cup \{A\} \models B \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \boxminus A \wedge \Box A \rightarrow B.$$

Aufgabe 6-2 **Herleitung von $\mathcal{L}^p_{\mathrm{LTL}}$-Formeln** (3 Punkte)

Leiten Sie die folgende Formel her. Dabei dürfen Sie neben den Axiomen und Regeln des formalen Systems $\Sigma^{\mathrm{p}}_{\mathrm{LTL}}$ auch die abgeleiteten Regeln (prop), (ind2) und

$$(\rightarrow\ominus) \quad A \rightarrow B \vdash \ominus A \rightarrow \ominus B$$

verwenden:

$$\ominus A \rightarrow A \vdash A.$$

Aufgabe 6-3 **Initiale Gültigkeit** (5 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Falls $\models_{\mathsf{K}} A$, dann auch $\overset{0}{\models}_{\mathsf{K}} A$.

b) $\models_{\mathsf{K}} A$ genau dann, wenn $\overset{0}{\models}_{\mathsf{K}} \Box A$.

c) $\mathcal{F} \models A$ genau dann, wenn $\Box\mathcal{F} \overset{0}{\models} A$. Dabei sei $\Box\mathcal{F} = \{\Box B \mid B \in \mathcal{F}\}$.

d) $\models A$ genau dann, wenn $\overset{0}{\models} A$.

Aufgabe 6-4 **Semantik von $\mathcal{L}_{FOL}$** (4 Punkte)

Sei $SIG = (\mathbf{S}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ eine prädikatenlogische Signatur mit

- $\mathbf{S} = \{N\}$,
- $\mathbf{F} = \{0^{(\varepsilon,N)}, succ^{(N,N)}\}$,
- $\mathbf{P} = \{<^{(N\,N)}\}$ (wir schreiben $a < b$ für $<(a,b)$).

Als Abkürzung sei $a \leq b$ definiert als $(a < b \vee a = b)$. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

a) $\exists x \forall y (x < y) \rightarrow \forall y \exists x (x < y)$.

b) $\exists x \forall y (y \leq x) \vee \forall x \exists y (x < y)$.

(Die runden Klammern sind in diesen Formeln zur besseren Lesbarkeit hinzugefügt.)

Aufgabe 6-5 **Herleitungen in der Prädikatenlogik** (keine Abgabe)

Beweisen Sie folgende Aussagen für das System Σ_{FOL}. Sie dürfen in Ihren Herleitungen nur die Axiome und Regeln des Systems und folgende Regeln verwenden:

$$
\begin{array}{ll}
(\neg\neg) & \vdash A \to \neg\neg A, \\
(\mathrm{KP}) & \vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A), \\
(\mathrm{KS}) & A \to B, B \to C \vdash A \to C.
\end{array}
$$

a) $A \vdash \forall x A$.

b) $\vdash x = y \to y = x$.

Aufgabe 6-6 **Einbettung der Temporallogik in klassische Prädikatenlogik** (keine Abgabe)

Gegeben sei eine Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{LTL}}(\mathbf{V})$ der temporalen Aussagenlogik. Die prädikatenlogische Signatur $SIG^T = (\mathbf{S}^T, \mathbf{F}^T, \mathbf{P}^T)$ sei wie folgt definiert:

- $\mathbf{S}^T = \{TIME\}$,
- $\mathbf{F}^T = \{0^{(\varepsilon, TIME)}, succ^{(TIME, TIME)}\}$,
- $\mathbf{P}^T = \{<^{(TIME\ TIME)}\} \cup \{\overline{v}^{(TIME)} : v \in \mathbf{V}\}$.

Eine Struktur S für $\mathcal{L}_{\mathrm{FOL}}(SIG^T)$ heißt *Standardstruktur*, wenn die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die Trägermenge $|\mathsf{S}|_{TIME}$ bilden und wenn 0, *succ* und $<$ als die Null, die Nachfolgerfunktion und die „kleiner als"-Relation auf den natürlichen Zahlen interpretiert werden.

Zu einer temporalen Struktur $\mathsf{K} = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ für $\mathbf{V}$ definieren wir eine Standardstruktur S_K für SIG^T durch

$$\overline{v}^{\mathsf{S}_\mathsf{K}}(i) = \mathsf{tt} \qquad \text{gdw.} \qquad \eta_i(v) = \mathsf{tt}$$

für alle $v \in \mathbf{V}$ und alle $i \in \mathbb{N}$.

Geben Sie eine Übersetzungsvorschrift an, die jeder Formel F von $\mathcal{L}_{\mathrm{LTL}}(\mathbf{V})$ eine Formel $\overline{F}$ von $\mathcal{L}_{\mathrm{FOL}}(SIG^T)$ mit einer freien Variablen x zuordnet, so dass für alle Formeln F, alle temporalen Strukturen K für $\mathbf{V}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathsf{K}_i(F) = \mathsf{tt} \qquad \text{gdw.} \qquad \models_{\mathsf{S}_\mathsf{K}} \overline{F}_x(\underline{i}),$$

wobei $\underline{i}$ den Term bezeichnet, der durch i-malige Anwendung von *succ* auf 0 entsteht.

Abgabe: Mittwoch, den 29.11.2006, vor der Übung.