

Temporale Logik und Zustandssysteme

Aufgabe 7-1 **Herleitungen in der Prädikatenlogik** (6 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen für das System Σ_{FOL} . Sie dürfen in Ihren Herleitungen neben den in Aufgabe 6-5 hergeleiteten Regeln nur die Axiome und Regeln des Systems Σ_{FOL} und folgende Regeln verwenden:

$$\begin{aligned} (\neg\neg) \quad & \vdash A \rightarrow \neg\neg A, \\ (\text{KP}) \quad & \vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A), \\ (\text{KS}) \quad & A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C. \end{aligned}$$

- a) $\vdash \forall x A \rightarrow A_x(t)$.
- b) $\vdash t = t$ für beliebigen Term t .
- c) $\vdash t_1 = t_2 \rightarrow t_2 = t_1$ für beliebige Terme t_1, t_2 .

Aufgabe 7-2 **Herleitung in der Peano-Arithmetik** (3 Punkte)

Die Theorie der natürlichen Zahlen (die Peano-Arithmetik) hat folgende Axiome:

$$\begin{aligned} (\text{PA1}) \quad & \text{SUCC}(x) \neq 0, \\ (\text{PA2}) \quad & \text{SUCC}(x) = \text{SUCC}(y) \rightarrow x = y, \\ (\text{PA3}) \quad & x + 0 = x, \\ (\text{PA4}) \quad & x + \text{SUCC}(y) = \text{SUCC}(x + y), \\ (\text{PA5}) \quad & x * 0 = 0, \\ (\text{PA6}) \quad & x * \text{SUCC}(y) = (x * y) + x, \\ (\text{PAInd}) \quad & (A_x(0) \wedge \forall x (A \rightarrow A_x(\text{SUCC}(x)))) \rightarrow \forall x A. \end{aligned}$$

Leiten Sie folgende in der Peano-Arithmetik gültigen Formeln her. Neben den angegebenen Axiomen und den Axiomen und Regeln von Σ_{FOL} dürfen Sie die (analog wie in LTL gegebene) Regel (prop), zuvor selbst hergeleitete Formeln und Regeln, die Ergebnisse von Aufgabe 6-5 und Aufgabe 7-1 sowie folgende Formeln verwenden:

$$\begin{aligned} (\text{eq3}) \quad & t_1 = t_2 \rightarrow t_x(t_1) = t_x(t_2), \\ (\text{trans}) \quad & t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \rightarrow t_1 = t_3. \end{aligned}$$

für beliebige Terme t, t_1, t_2, t_3 und beliebige Variable x . ($t_x(t')$ ist analog definiert wie $A_x(t')$.)

- a) $0 + x = x$. (keine Abgabe)
- b) $0 * x = 0$. (3 Punkte)
- c) $x * s(s(0)) = x + x$. (keine Abgabe)

Aufgabe 7-3 **Allgemeingültige Formeln in FOLTL** (4 Punkte)

Welche der folgenden Formeln von $\mathcal{L}_{\text{FOLTL}}$ sind allgemeingültig? (Es seien $a, b \in \mathbf{X}$ und $x, y \in \mathcal{X}$.) Begründen Sie Ihre Aussagen.

- a) $x = y \rightarrow \Box(x = y)$.
- b) $\Diamond\Box\forall x A \rightarrow \forall x\Diamond\Box A$.
- c) $\forall x\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond\Box\forall x A$.
- d) $\forall x\Diamond A \rightarrow \Diamond\forall x A$.

Abgabe: Mittwoch, den 6.12.2006, vor der Übung.