Ludwig-Maximilians-Universität München WS 2006/2007
Institut für Informatik Übungsblatt 1
Prof. Dr. F. Kröger, M. Hammer

Temporale Logik und Zustandssysteme Lösungsvorschlag

Aufgabe 1-1 **Eine Logik L_1** (5 Punkte)

Die Menge der Formeln einer Logik L_1 sei definiert als die Menge $\{a, b\}^*$ aller Zeichenreihen über dem Alphabet $\{a, b\}$.

Die Semantik der Logik L_1 sei gegeben durch

- die Klasse der möglichen Interpretationen $\{\mathsf{J}_i \mid i \in \mathbb{N} \wedge i > 0\}$
- $\models_{\mathsf{J}_i} A \Leftrightarrow$ die Anzahl der a in A ist durch i ohne Rest teilbar.

a) Bestimmen Sie die Menge der allgemeingültigen Formeln.

Lösung: Da nur die 0 durch alle natürlichen Zahlen teilbar ist, ist dies genau die Menge b^*. Sei $|A|_a$ die Anzahl der a in A:

$$\begin{aligned} A \text{ allg.} &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_{>0}. |A|_a \bmod i = 0 \\ &\Leftrightarrow |A|_a = 0 \\ &\Leftrightarrow A \in \{b\}^* \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Menge der nicht erfüllbaren Formeln. (Eine Formel A heißt erfüllbar wenn es eine Interpretation J mit $\models_{\mathsf{J}} A$ gibt.)

Lösung: Dies ist die Menge $\emptyset$. Für eine beliebige Formel A gilt stets $\models_{\mathsf{J}_1} A$:

$$\begin{aligned} A \text{ unerf.} &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_{>0}. |A|_a \bmod i \neq 0 \\ &\Rightarrow |A|_a \bmod 1 = 0 \\ &\Rightarrow \textbf{false} \end{aligned}$$

c) Geben Sie ein korrektes und vollständiges formales System Σ_{L_1} für L_1 an.

Lösung: Für ein korrektes und vollständiges System Σ muß gelten, daß

$$\mathcal{F} \models A \Leftrightarrow \mathcal{F} \vdash_\Sigma A$$

$A_1, \ldots, A_n \models B$ bedeutet hierbei, daß B in den Interpretationen gültig ist, in denen auch A_1 bis A_n gültig sind. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Anzahl der a in A_1 bis A_n und $a_g = ggT(a_1, \ldots, a_n)$ (mit $ggT(a_1, \ldots, a_i, 0, a_{i+2}, \ldots, a_n) = ggT(a_1, \ldots, a_i, a_{i+2}, \ldots, a_n)$ und $ggT(\emptyset) = 0$). In der Interpretation J_{a_g} gelten A_1 bis A_n sowie jede andere Formel, die $a_g \cdot n$ mal a enthält (für $n \in \mathbb{N}_0$). Zudem ist J_{a_g} die „strengste“ der Interpretationen – in jeder Interpretation, in der die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ gelten, ist eine Obermenge der Formeln gültig, die in J_{a_g} gültig sind – weshalb wir nur diese Interpretation berücksichtigen müssen.

Beispielsweise gelten die Formeln $aaba$, $bbba$ nur in der Interpretation J_1, und in dieser Interpretation ist jede Formel gültig (da $ggT(3, 1) = 1$). Hingegen gelten $aaba$, bbb in den Interpretationen J_1 und J_3, und die Schnittmenge der in diesen Interpretationen gültigen Formeln ist die Menge der Formeln, die eine durch 3 teilbare Anzahl an a enthalten (und natürlich beliebig viele b).

Wir können nun also ein formales System wie folgt entwerfen:

- Axiom: ϵ
- Regel-Schemata:

– $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ für $B \equiv a^{n \cdot a_g}$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und a_g wie oben definiert
– $AB \vdash AbB$ für beliebige $A, B \in \{a, b\}^*$

Man beachte, daß sich auf diese Weise alle allgemeingültigen Formeln ohne Prämisse herleiten lassen: b^n aus dem Axiom ϵ und n-facher Anwendung der zweiten Regel mit A das bisher abgeleitete und $B \equiv \epsilon$. Ohne Prämisse lassen sich auch *nur* diese Formeln herleiten: Da $ggT(\emptyset) = 0$, kann die erste Regel nur die Formel $a^{n \cdot 0} = a^0 = \epsilon$ produzieren.

Aufgabe 1-2 **Ein formales System** (8 Punkte)

L_2 sei eine Logik mit derselben Sprache $\{a, b\}^*$ wie L_1 in Aufgabe 1. Ein formales System Σ_{L_2} für L_2 sei gegeben durch:

- Axiom: a
- Regel-Schemata (für beliebige Formeln A, B):
  1. $Aaaa \vdash Ab$
  2. $AB \vdash ABB$ für $B \in \{a\}^* \cup \{b\}^*$

a) Geben Sie eine Herleitung der Formel aab an.

Lösung:

(1)	a	(Axiom)
(2)	aa	(Regel 2)(1)
(3)	$aaaa$	(Regel 2)(2)
(4)	$aaaaa$	(Regel 2)(3)
(5)	aab	(Regel 1)(4)

b) Widerlegen Sie die Herleitbarkeit der Formel baa durch strukturelle Induktion.

Lösung: Wir beweisen ein Lemma, das die Herleitbarkeit von baa sofort ausschließt:

Lemma 1. *In keiner herleitbaren Formel F folgt auf ein b ein a.*

Beweis. Per Induktion über die Herleitung von F:

- $F \equiv a$: trivial wahr
- $F \equiv Ab$ durch Anwendung von Regel 1: Nach Induktionsvoraussetzung folgt, daß in der Prämisse $Aaaa$ auf ein b kein a folgen kann (was bedeutet, daß $A \in \{A\}^*$); insofern auch nicht in Ab.
- $F \equiv ABB$ durch Anwendung von Regel 2: Nach Induktionsvoraussetzung folgt, daß in der Prämisse AB auf ein b kein a folgen kann. Da Regel 2 nur angewendet werden kann, wenn entweder $B \in \{a\}^*$ oder $y \in \{b\}^*$, besteht ABB entweder nur aus a, oder B enthält nur b, und in beiden Fällen folgt auf ein b kein a.

□

Aus dem Lemma folgt unmittelbar, daß $AbaB$ nicht herleitbar ist, insofern auch nicht baa.

c) Bestimmen Sie die Menge aller herleitbaren Formeln.

Lösung: Dies ist genau die Menge aller Formeln, wo auf endlich viele (möglicherweise auch 0) a endlich viele (wiederum möglicherweise auch 0) B folgen, wobei der leere String ausgeschlossen ist:

$$\{a^m b^n \mid m \in \mathbb{N}_0 \wedge n \in \mathbb{N}_0 \wedge n + m > 0\}$$

Ein Beweis dieser Aussage könnte zuerst feststellen, daß sich, gegeben eine Formel XY mit $Y \in \{a, b\}$, per Regel 2 jede Formel der Form XY^m für $m \in \mathbb{N}_1$ herleiten lässt. Mit dem Lemma der Teilaufgabe c. ergibt sich oben angegebene Menge.

d) Wie könnte man die Regel-Schemata erweitern, um baa herleiten zu können?

Lösung: Am einfachsten durch eine direkte Regel: $A \vdash baa$ für beliebiges A. Etwas eleganter könnte man ein Regelschema $AB \vdash BA$ einführen, und baa aus dem Ergebnis von Teilaufgabe a. herleiten.

Abgabe: Mittwoch, den 25.10.2006, vor der Übung.