Temporale Logik und Zustandssysteme Lösungsvorschlag

Aufgabe 2-1 **Finden Sie den Mörder** (5 Punkte)

Tante Agathe wurde in ihrem Haus tot aufgefunden. Nach den bisherigen Ermittlungen gilt folgendes als sicher:

1. Im Haus lebten nur Agathe, ihr Butler und Onkel Charles.
2. Agathe wurde von einem Hausbewohner getötet.
3. Wer immer jemanden tötet, hasst sein Opfer.
4. Der Täter ist niemals reicher als das Opfer.
5. Charles hasst niemanden, den Agathe hasste.
6. Agathe hasste alle außer vielleicht den Butler.
7. Der Butler hasst alle, die nicht reicher als Agathe sind oder die Agathe hasste.
8. Kein Hausbewohner hasst(e) alle Hausbewohner.

a) Beschreiben Sie den Stand der Ermittlungen durch eine Menge $\mathcal{A}$ von Formeln von $\mathcal{L}_{\mathrm{PL}}(\mathbf{V})$ mit einer geeigneten Menge $\mathbf{V}$ von atomaren Aussagen. Beschreiben Sie dabei informell die Bedeutung der Aussagen in $\mathbf{V}$.

b) Finden Sie den Täter: Zeigen Sie, dass aus $\mathcal{A}$ eine Formel folgt, welche die Person bestimmt, die Tante Agathe tötete.

Lösung:

a. Diese Aufgabe ist ein Standardproblem für automatische Beweissysteme. Ein Hauptproblem ist die Codierung in einer geeigneten (aussagen- oder prädikaten-) logischen Sprache.

   Sei $P = \{a, b, c\}$ (man denke an Agathe, Butler, Charles). Wir definieren die Menge

$$\mathbf{V} = \{kill_{xy}, hate_{xy}, richer_{xy} \mid x, y \in P\}$$

   von Aussagevariablen. Die Interpretation ist ziemlich offensichtlich, z.B. steht $hate_{ac}$ für die Aussage "Agathe hasste Charles". Damit übersetzen wir die gegebenen Aussagen in die folgende Menge $\mathcal{A}$ von Formeln:

   (1) Im Haus lebten nur Agathe, ihr Butler und Onkel Charles.
   wird nicht explizit übersetzt, sondern ist Grundannahme bei der folgenden Codierung

   (2) Agathe wurde von einem Hausbewohner getötet.

$$kill_{aa} \vee kill_{ba} \vee kill_{ca}$$

   (3) Wer immer jemanden tötet, hasst sein Opfer.

$$kill_{xy} \rightarrow hate_{xy} \qquad \text{für alle } x, y \in P$$

   (4) Der Täter ist niemals reicher als das Opfer.

$$kill_{xy} \rightarrow \neg richer_{xy} \qquad \text{für alle } x, y \in P$$

(5) Charles hasst niemanden, den Agathe hasste.

$$hate_{ax} \to \neg hate_{cx} \qquad \text{für alle } x \in P$$

(6) Agathe hasste alle außer vielleicht den Butler.

$$hate_{aa} \wedge hate_{ac}$$

(7) Der Butler hasst alle, die nicht reicher als Agathe sind oder die Agathe hasste.

$$(\neg richer_{xa} \vee hate_{ax}) \to hate_{bx} \qquad \text{für alle } x \in P$$

(8) Kein Hausbewohner hasst(e) alle Hausbewohner.

$$\neg hate_{xa} \vee \neg hate_{xb} \vee \neg hate_{xc} \qquad \text{für alle } x \in P$$

b. Wir zeigen, dass ein Selbstmord vorliegt, indem wir beweisen:

$$\mathcal{A} \models kill_{aa}$$

Sei dazu B eine beliebige aussagenlogische Belegung und gelte $\models_{\mathsf{B}} A$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Gemäß Formel (2) muss $\mathsf{B}(kill_{xa}) = \mathsf{tt}$ gelten für ein $x \in P$. Wir zeigen nun, dass die Annahmen $\mathsf{B}(kill_{ba}) = \mathsf{tt}$ bzw. $\mathsf{B}(kill_{ca}) = \mathsf{tt}$ zu Widersprüchen führen.

Annahme (C) : $\mathsf{B}(kill_{ca}) = \mathsf{tt}$.

$$\begin{array}{rcl} (3) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{ca}) = \mathsf{tt} \\ (5) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{aa}) = \mathsf{ff} \end{array}$$

Die letzte Aussage steht im Widerspruch zu Aussage (6), also kann die Annahme (C) nicht zutreffen.

Annahme (B) : $\mathsf{B}(kill_{ba}) = \mathsf{tt}$.

$$\begin{array}{rcll} (4) & \Rightarrow & \mathsf{B}(richer_{ba}) = \mathsf{ff} & \\ (7) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{bb}) = \mathsf{tt} & (*) \\ (B), (3) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{ba}) = \mathsf{tt} & \\ (8), (*) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{bc}) = \mathsf{ff} & \\ (7) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{ac}) = \mathsf{ff} & \end{array}$$

Die letzte Aussage steht ebenfalls im Widerspruch zu Formel (6), somit ist dieser Fall auch nicht möglich.

Obwohl nun also mit logischer Strenge bewiesen ist, dass Tante Agathe Selbstmord begangen hat, bleibt die Argumentation vielleicht etwas unbefriedigend. Das liegt daran, dass wir nicht gezeigt haben, dass unsere Annahmen $\mathcal{A}$ überhaupt erfüllbar sind. Gäbe es keine Belegung B, die alle Formeln in $\mathcal{A}$ erfüllt, so könnten wir mit derselben Berechtigung folgern, dass alle drei Hausbewohner Agathe umgebracht haben! Was wiederum zeigen würde, dass mathematische Logik und gesunder Menschenverstand nicht immer übereinstimmen. In unserem Fall können wir aber eine Belegung angeben, die alle Formeln in $\mathcal{A}$ erfüllt (und bei der natürlich auch ein Selbstmord vorliegt). Man kann leicht nachrechnen, dass die Belegung B, die genau die folgenden Aussagen erfüllt, ein Modell von $\mathcal{A}$ ist:

$$\{\ kill_{aa}, hate_{aa}, hate_{ac}, hate_{ba}, hate_{bc}, richer_{ba}\ \}$$

(Die letzte Aussage überzeugt uns davon, dass der Fall nur in England spielen kann.)

Aufgabe 2-2 **Herleitungen in $\Sigma_{\mathbf{PL}}$** (keine Abgabe)

Leiten Sie folgende Regel bzw. Formel von PL im formalen System Σ_{PL} her. Verwenden Sie dabei lediglich Axiome von Σ_{PL}, den Modus Ponens und selbst hergeleitete Tautologien und Regeln.

a) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ ("Kettenregel")

Lösung:

(1)	$A \to B$	(Prämisse)
(2)	$B \to C$	(Prämisse)
(3)	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	(ax.1)
(4)	$(A \to (B \to C))$	(mp)(2)(3)
(5)	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	(ax.2)
(6)	$(A \to B) \to (A \to C)$	(mp)(4)(5)
(7)	$A \to C$	(mp)(1)(6)

b) $\mathbf{false} \to A$ ("ex falsum quod libet")

Lösung:

(1)	$\mathbf{false} \to ((A \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false})$	(ax.1)
(2)	$((A \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false}) \to A$	(ax.3)
(3)	$\mathbf{false} \to A$	(Aufgabe b)(1)(2)

Aufgabe 2-3 **Herleitungen in $\Sigma_{\mathbf{PL}}$** (4 Punkte)

Leiten Sie die Formel $A \to A$ in Σ_{PL} her. Verwenden Sie dabei lediglich Axiome von Σ_{PL} und den Modus Ponens.

Lösung:

(1)	$A \to ((A \to A) \to A)$	(ax.1)
(2)	$A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	(ax.2)
(3)	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	(mp),(1),(2)
(4)	$A \to (A \to A)$	(ax.1)
(5)	$A \to A$	(mp),(3),(4)

Auch wenn diese Formel trivial erscheint, enthält sie doch eine wichtige Aussage: Die Formel $\neg A \to \neg A \equiv A \vee \neg A$, genannt "tertium non datur", ist in manchen formalen Systemen für PL ein eigenes Axiom.

Aufgabe 2-4 **Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit, 1.** (5 Punkte)

Analog zur Definition in Aufgabe 1-1 heißt eine Formel A der Logik PL *erfüllbar*, wenn es eine Belegung B gibt, für die $\models_{\mathsf{B}} A$ gilt. Entscheiden Sie, ob die folgenden Formeln jeweils allgemeingültig, erfüllbar aber nicht allgemeingültig, oder nicht erfüllbar sind. Beweisen Sie Ihre Antworten.

a) $((A \to C) \wedge (B \to C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \to C)$

Lösung: Die Formel ist allgemeingültig. Nach Definition müssen wir zeigen, dass für jede Belegung B gilt: $\mathsf{B}((A \to C) \wedge (B \to C)) = \mathsf{tt}$ genau dann, wenn $\mathsf{B}((A \vee B) \to C) = \mathsf{tt}$.

"$\Rightarrow$" Sei B eine Belegung mit $\mathsf{B}(A \to C) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{B}(B \to C) = \mathsf{tt}$.
Fall: $\mathsf{B}(C) = \mathsf{tt}$. Dann gilt offenbar auch $\mathsf{B}((A \vee B) \to C) = \mathsf{tt}$.
Fall: $\mathsf{B}(C) = \mathsf{ff}$. Dann muss $\mathsf{B}(A) = \mathsf{ff}$ und $\mathsf{B}(B) = \mathsf{ff}$ gelten. Damit gilt $\mathsf{B}(A \vee B) = \mathsf{ff}$, folglich auch $\mathsf{B}((A \vee B) \to C) = \mathsf{tt}$.

"$\Leftarrow$" Sei B eine Belegung mit $\mathsf{B}((A \vee B) \to C) = \mathsf{tt}$. Es gibt zwei Fälle:
Fall: $\mathsf{B}(C) = \mathsf{tt}$. Dann gilt $\mathsf{B}(A \to C) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{B}(B \to C) = \mathsf{tt}$ und damit $\mathsf{B}((A \to C) \wedge (B \to C)) = \mathsf{tt}$.
Fall: $\mathsf{B}(A \vee B) = \mathsf{ff}$. Dann gilt nach Definition $\mathsf{B}(A) = \mathsf{ff}$ und $\mathsf{B}(B) = \mathsf{ff}$, folglich $\mathsf{B}(A \to C) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{B}(B \to C) = \mathsf{tt}$, das heißt $\mathsf{B}((A \to C) \wedge (B \to C)) = \mathsf{tt}$.

b) $((A \wedge B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$

Lösung: Nicht allgemeingültig: sei $A \equiv \mathbf{true}$, $B \equiv \mathbf{false}$ und $C \equiv \mathbf{false}$. Weiter sei B eine beliebige Belegung. Dann gilt $\mathsf{B}(A \wedge B) = \mathsf{ff}$, insbesondere also $\mathsf{B}((A \wedge B) \to C) = \mathsf{tt}$, aber $\mathsf{B}(A \to C) = \mathsf{ff}$, also auch $\mathsf{B}((A \to C) \wedge (B \to C)) = \mathsf{ff}$ und damit nach Definition $\mathsf{B}(F) = \mathsf{ff}$.

Erfüllbar: für $C \equiv \mathbf{true}$ und eine beliebige Belegung B gilt $\models_{\mathsf{B}} F$.

c) $(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$

Lösung: Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit: Belegung B mit $\mathsf{B}(A) = \mathsf{ff}$ und $\mathsf{B}(B) = \mathsf{tt}$. Erfüllbar ist die Formel z.B. durch eine Belegung mit $\mathsf{B}(A) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{B}(B) = \mathsf{ff}$.

d) $\neg(A \to \neg B) \wedge \neg A \wedge \neg B$

Lösung: Für kleine Beispiele kann man auch in Form einer Wahrheitstabelle argumentieren:

A	B	$(A \to \neg B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg(A \to \neg B) \wedge \neg A \wedge \neg B$
ff	ff	tt	tt	ff
ff	tt	tt	ff	ff
tt	ff	tt	ff	ff
tt	tt	ff	ff	ff

Diese Formel ist also nicht erfüllbar (man sagt auch "absurd").

e) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

Lösung: Diese "Kontraposition" genannte Äquivalenz gibt eine formelle Begründung für die Zulässigkeit eines Widerspruchsbeweises: Um aus A B folgern zu können genügt es, aus der Nichtgültigkeit von B die Nichtgültigkeit von A zu folgern.

Sei B eine beliebige Belegung.

$\mathsf{B}(A \to B) = \mathsf{tt}$ gdw.

$\mathsf{B}(A) = \mathsf{ff}$ oder $\mathsf{B}(B) = \mathsf{tt}$ gdw.

$\mathsf{B}(\neg A) = \mathsf{tt}$ oder $\mathsf{B}(\neg B) = \mathsf{ff}$ gdw.

$\mathsf{B}(\neg B \to \neg A) = \mathsf{tt}$.

Aufgabe 2-5 **Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit, 2.** (keine Abgabe)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen für die Logik PL:

a) Falls $\models A \vee B$, so entweder $\models A$ oder $\models B$.

Lösung: Falsch, denn betrachte z.B. $A \equiv v_0$ und $B \equiv \neg v_0$, für eine beliebige atomare Aussage v_0. Dann gilt $\models v_0 \vee \neg v_0$, aber weder v_0 noch $\neg v_0$ sind allgemeingültig.

b) Falls $\models A \wedge B$, so $\models A$ und $\models B$.

Lösung: Korrekt. Gelte $\models A \wedge B$, dann müssen in jeder Interpretation A und B gelten, also sind A und B allgemeingültig.

c) Ist $A \to B$ erfüllbar und B nicht allgemeingültig, so ist A erfüllbar.

Lösung: Falsch. Betrachte $A \equiv$ **false**, $B \equiv$ **false**. Die Formel **false** $\to$ **false** ist erfüllbar (sogar allgemeingültig), $B \equiv$ **false** nicht allgemeingültig, aber $A \equiv$ **false** sicher nicht erfüllbar.

d) A ist allgemeingültig genau dann, wenn $\neg A$ nicht erfüllbar ist.

Lösung: Korrekt. Denn

A ist allgemeingültig gdw

für jede Belegung B gilt $\models_{\mathsf{B}} A$ gdw

für jede Belegung B gilt $\mathsf{B}(A) = \mathsf{tt}$ gdw

für jede Belegung B gilt $\mathsf{B}(\neg A) = \mathsf{ff}$ gdw

für jede Belegung B gilt $\not\models_{\mathsf{B}} \neg A$ gdw

$\neg A$ ist nicht erfüllbar

Abgabe: Mittwoch, den 1.11.2006, vor der Übung.