Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, M. Hammer

WS 2006/2007
Übungsblatt 3

Temporale Logik und Zustandssysteme Lösungsvorschlag

Aufgabe 3-1 **Temporale Aussagen in LTL** (3 Punkte)

Seien A und B Formeln von $\mathcal{L}_{\text{LTL}}$. Geben Sie LTL-Formeln mit den folgenden jeweiligen informellen Bedeutungen an.

a) „Wenn A das nächste Mal gilt, gilt danach nie wieder B"

Lösung: $\Box(A \rightarrow \bigcirc\Box\neg B)$

b) „A gilt ab jetzt genau einmal"

Lösung: $\Diamond A \land \Box(A \rightarrow \bigcirc\Box\neg A)$

c) „A gilt ab jetzt mindestens zweimal"

Lösung: $\Diamond(A \land \bigcirc\Diamond A)$

Aufgabe 3-2 **Semantik von Formeln** (5 Punkte)

Sei A eine Formel der Logik LTL. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\models (\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(A \rightarrow B)$

Lösung: Nicht allgemeingültig. Seien $A \equiv v_1, B \equiv v_2$ atomare Aussagen. Sei $\mathsf{K} = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ eine Kripke-Struktur mit $\eta_i(v_2) = \mathsf{ff}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und

$$\eta_i(v_1) = \begin{cases} \mathsf{tt} & \text{falls } i = 0 \\ \mathsf{ff} & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $\not\models_{\mathsf{K}} \Box A$ und insofern $\models_{\mathsf{K}} (\Box A \rightarrow \Box B)$, aber $\mathsf{K}_0(A \rightarrow B) = \mathsf{ff}$, und insofern $\not\models_{\mathsf{K}} \Box(A \rightarrow B)$.

b) Ist A allgemeingültig, so auch $\Box A$, $\Diamond A$ und $\bigcirc A$.

Lösung: Eine korrekte Aussage. Sei A eine beliebige allgemeingültige Formel aus $\mathcal{L}_{\text{LTL}}$. Dann gilt für jede Kripke-Struktur K, daß $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch:

- $\mathsf{K}_j(A) = \mathsf{tt}$ für alle $j \geq i$ für beliebiges $i \in \mathbb{N}$, und insofern $\mathsf{K}_i(\Box A) = \mathsf{tt}$.
- $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für ein beliebiges $k \geq i$, und insofern auch $\mathsf{K}_i(\Diamond A) = \mathsf{tt}$.
- und nach derselben Argumentation gilt auch $\mathsf{K}_l(A) = \mathsf{tt}$ für $l = i + 1$, und daher $\mathsf{K}_i(\bigcirc A) = \mathsf{tt}$.

c) $\models \Diamond\Box A \land \neg\Box\Diamond A$

Lösung: Nicht erfüllbare Formel. Die Negation $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$ ist gerade das Gesetz **T9**.

Sei K beliebige Kripke-Struktur mit $\models_{\mathsf{K}} \Diamond\Box A$. Also gilt $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für alle $k \geq j$ für ein $j \geq i$ (informell: irgendwann gilt immer A).

Annahme: Es gilt $\models_{\mathsf{K}} (\neg\Box\Diamond A)$, also $\mathsf{K}_i(\Box\Diamond A) = \mathsf{ff}$, also $\mathsf{K}_{k'}(A) = \mathsf{ff}$ für ein $k' \geq j'$ für alle $j' \geq i$ (informell: es gilt immer irgendwann nicht A). Wähle $j' = j$. Dann gäbe es ein $k' \geq j'$ mit $\mathsf{K}_{k'} = \mathsf{ff}$, Widerspruch zu $\mathsf{K}_{k'}(A) = \mathsf{tt}$.

d) $\models \Box(\Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow A) \rightarrow (\Diamond\Box A \rightarrow A)$

Lösung: Allgemeingültig. Sei K beliebig. Zu zeigen ist, daß aus $\mathsf{K}_i(\Diamond\Box A \rightarrow A) = \mathsf{ff}$ folgt, daß $\mathsf{K}_i(\Box(\Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow A)) = \mathsf{ff}$.

Sei also $\mathsf{K}_i(\Diamond\Box A \rightarrow A) = \mathsf{ff}$. Dies gilt gdw. $\mathsf{K}_i(\Diamond\Box A) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{ff}$. Es gilt also $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für alle $k \geq j$ für ein $j \geq i$ (informell: irgendwann immer A). Es gilt ebenfalls $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{ff}$. Es gibt also ein $l \geq i$ mit $\mathsf{K}_l(A) = \mathsf{ff}$ und $\mathsf{K}_{l+1}(\Box A) = \mathsf{tt}$. Es gilt $\mathsf{K}_m(A \rightarrow \Box A) = \mathsf{tt}$ für alle $m \geq l$. Damit gilt $\mathsf{K}_l(\Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow A) = \mathsf{ff}$, und somit $\mathsf{K}_i(\Box(\Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow A)) = \mathsf{ff}$.

Aufgabe 3-3 **Mengen von temporalen Strukturen** (5 Punkte)

Sei $\mathbf{V}$ eine Menge von Aussagenkonstanten. Die Menge Mod(A) für eine Formel A von $\mathcal{L}_{\mathrm{LTL}}(\mathbf{V})$ ist definiert als

$$\mathrm{Mod}(A) = \{\mathsf{K} \mid \mathsf{K} \text{ ist temporale Struktur für } \mathbf{V} \text{ mit } \models_{\mathsf{K}} A\}$$

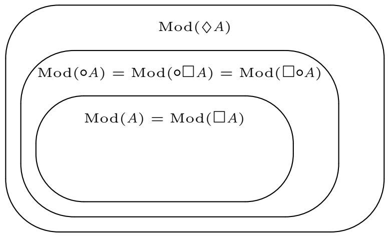
Geben Sie (als Diagramm) die Teilmengenbeziehungen zwischen folgenden Mengen an:

Mod(A), Mod$(\bigcirc A)$, Mod$(\Diamond A)$, Mod$(\Box A)$, Mod$(\Box\bigcirc A)$, Mod$(\bigcirc\Box A)$.

Lösung: Tatsächlich gibt es bei dieser Aufgabe nur drei unterscheidbare Mengen, denn Mod(A) = Mod$(\Box A)$ und Mod$(\bigcirc A)$ = Mod$(\bigcirc\Box A)$ = Mod$(\Box\bigcirc A)$. Die Inklusion ist demnach

$$\mathrm{Mod}(A) \subseteq \mathrm{Mod}(\bigcirc A) \subseteq \mathrm{Mod}(\Diamond A)$$

Die Teilmengenbeziehung ist i.A. nicht echt, wie man für $A \equiv$ **false** sieht. Bei einem Diagramm wird diese Möglichkeit natürlich nicht verdeutlicht:



Abgabe: Mittwoch, den 8.11.2006, vor der Übung.