Temporale Logik und Zustandssysteme Lösungsvorschlag

Aufgabe 6-1 **Folgerung und Implikation in LTL+p** (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass für LTL+p Folgendes gilt:

$$\mathcal{F} \cup \{A\} \models B \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \boxminus A \wedge \Box A \to B.$$

Lösung: Sei $\mathcal{F}$ eine beliebige Menge von $\mathcal{L}_{\mathrm{LTL}}^{\mathrm{p}}$- Formeln, A und B beliebige Formeln von $\mathcal{L}_{\mathrm{LTL}}^{\mathrm{p}}$.

"$\Rightarrow$": Gelte $\mathcal{F} \cup \{A\} \models B$. Weiter sei K eine temporale Struktur mit $\mathsf{K}_i(C) = \mathsf{tt}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle Formeln $C \in \mathcal{F}$. Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig mit $\mathsf{K}_i(\boxminus A \wedge \Box A) = \mathsf{tt}$. Zu zeigen ist $\mathsf{K}_i(B) = \mathsf{tt}$. Wegen $\mathsf{K}_i(\boxminus A) = \mathsf{tt}$ gilt $\mathsf{K}_j(A) = \mathsf{tt}$ für alle $j \leq i$. Außerdem gilt wegen $\mathsf{K}_i(\Box A) = \mathsf{tt}$ auch $\mathsf{K}_j(A) = \mathsf{tt}$ für alle $j \geq i$. Insgesamt also $\mathsf{K}_j(A) = \mathsf{tt}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, d.h. $\models_{\mathsf{K}} A$. Nach Annahme gilt $\models_{\mathsf{K}} C$ für alle $C \in \mathcal{F}$, insgesamt also $\models_{\mathsf{K}} C$ für alle $C \in \mathcal{F} \cup \{A\}$. Nach der Annahme ($\mathcal{F} \cup \{A\} \models B$) folgt also $\models_{\mathsf{K}} B$ und damit auch $\mathsf{K}_i(B) = \mathsf{tt}$.

"$\Leftarrow$": Gelte $\mathcal{F} \models \boxminus A \wedge \Box A \to B$ und sei K eine temporale Struktur mit $\models_{\mathsf{K}} C$ für alle $C \in \mathcal{F} \cup \{A\}$. Zu zeigen ist $\mathsf{K}_i(B) = \mathsf{tt}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei also $i \in \mathbb{N}$ beliebig. Da nach Voraussetzung $\mathsf{K}_j(A) = \mathsf{tt}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, gilt offenbar auch $\mathsf{K}_i(\boxminus A \wedge \Box A) = \mathsf{tt}$. Wegen $\models_{\mathsf{K}} C$ für alle $C \in \mathcal{F}$ gilt nach Voraussetzung auch $\models_{\mathsf{K}} \boxminus A \wedge \Box A \to B$, insbesondere also $\mathsf{K}_i(\boxminus A \wedge \Box A \to B) = \mathsf{tt}$ und damit $\mathsf{K}_i(B) = \mathsf{tt}$. Das war zu zeigen.

Aufgabe 6-2 **Herleitung von $\mathcal{L}_{\mathrm{LTL}}^{p}$-Formeln** (3 Punkte)

Leiten Sie die folgende Formel her. Dabei dürfen Sie neben den Axiomen und Regeln des formalen Systems $\Sigma_{\mathrm{LTL}}^{\mathrm{p}}$ auch die abgeleiteten Regeln (prop), (ind2) und

$$(\to\ominus) \quad A \to B \vdash \ominus A \to \ominus B$$

verwenden:

$$\ominus A \to A \vdash A.$$

Lösung: Wieso gilt die Beziehung eigentlich? Sei K eine temporale Struktur mit $\models_{\mathsf{K}} \ominus A \to A$. Im Anfangszustand gilt $\mathsf{K}_0(\ominus A) = \mathsf{tt}$ trivialerweise, und mit $\models_{\mathsf{K}} \ominus A \to A$ folgt $\mathsf{K}_0(A) = \mathsf{tt}$. Induktiv sei $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt}$, und mit $\mathsf{K}_{i+1}(\ominus A \to A) = \mathsf{tt}$ folgt $\mathsf{K}_{i+1}(A) = \mathsf{tt}$. Also folgt $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, d.h. $\models_{\mathsf{K}} A$.

Die semantische Begündung zeigt, dass die Existenz eines Anfangszustands wesentlich ist. Daher zielen wir in der Herleitung auf die Verwendung von (pltl4) und zeigen

$$\ominus A \to A \ \vdash \ \neg A \to \boxminus \neg \ominus \mathbf{false}$$

(1)	$\ominus A \to A$	(Ann.)
(2)	$\neg A \to \neg \ominus A$	(prop)(1)
(3)	$\mathbf{false} \to A$	(taut)
(4)	$\ominus \mathbf{false} \to \ominus A$	$(\to\ominus)$(3)
(5)	$\neg A \to \neg \ominus \mathbf{false}$	(prop)(2)(4)
(6)	$\neg\neg A \to A$	(taut)
(7)	$\ominus \neg\neg A \to \ominus A$	$(\to\ominus)$(6)
(8)	$\neg \ominus A \to \neg \ominus \neg\neg A$	(prop)(7)

(9)	$\neg\circleddash\neg\neg A \to \neg\neg\circleddash\neg A$	(pltl1)
(10)	$\neg A \to \circleddash\neg A$	(prop)(2)(8)(9)
(11)	$\neg A \to \boxminus\neg\circleddash\,\mathbf{false}$	(indpast)(5)(10)
(12)	$\diamondminus\circleddash\mathbf{false} \to A$	(prop)(11)
(13)	A	(mp)(12)(pltl4)

Aufgabe 6-3 **Initiale Gültigkeit** (5 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Falls $\models_{\mathsf{K}} A$, dann auch $\models^0_{\mathsf{K}} A$.

Lösung: *Annahme:* Es gelte $\models_{\mathsf{K}} A$ (für eine temp. Struktur K und Formel A).

Zu zeigen: $\models^0_{\mathsf{K}} A$, d.h. $\mathsf{K}_0(A) = \mathsf{tt}$ für alle temporalen Strukturen K.

Nach Annahme gilt $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also auch $\mathsf{K}_0(A) = \mathsf{tt}$.

b) $\models_{\mathsf{K}} A$ genau dann, wenn $\models^0_{\mathsf{K}} \Box A$.

Lösung:

$$\begin{array}{rl} & \models_{\mathsf{K}} A \\ \Longleftrightarrow & \mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \\ \Longleftrightarrow & \mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt} \text{ für alle } i \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & \mathsf{K}_0(\Box A) = \mathsf{tt} \\ \Longleftrightarrow & \models^0_{\mathsf{K}} \Box A \end{array}$$

c) $\mathcal{F} \models A$ genau dann, wenn $\Box\mathcal{F} \models^0 A$. Dabei sei $\Box\mathcal{F} = \{\Box B \mid B \in \mathcal{F}\}$.

Lösung:

$\Rightarrow$: Gelte $\mathcal{F} \models A$, zu zeigen ist $\Box\mathcal{F} \models^0 A$.

Sei also K eine temporale Struktur mit $\models^0_{\mathsf{K}} \Box F$ für alle $F \in \mathcal{F}$, also gilt nach Teilaufgabe (b) dann auch $\models_{\mathsf{K}} F$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Mit Annahme $\mathcal{F} \models A$ folgt $\models_{\mathsf{K}} A$, also nach Teilaufgabe (a) auch $\models^0_{\mathsf{K}} A$.

$\Leftarrow$: Gelte $\Box\mathcal{F} \models^0 A$, zu zeigen ist $\mathcal{F} \models A$.

Sei also $\mathsf{K} = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ eine temporale Struktur mit $\models_{\mathsf{K}} F$ für alle $F \in \mathcal{F}$, zu zeigen ist $\models_{\mathsf{K}} A$, d.h. $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei nun $i \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt, und betrachte die Struktur $\mathsf{K}^i = (\eta_i, \eta_{i+1}, \ldots)$. Mit Lemma 2.1.5 folgt $\models_{\mathsf{K}^i} F$ für alle $F \in \mathcal{F}$, und mit Teilaufgabe (b) folgt $\models^0_{\mathsf{K}^i} \Box F$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Mit der Annahme $\Box\mathcal{F} \models^0 A$ folgt $\models^0_{\mathsf{K}^i} A$, also $\mathsf{K}^i_0(A) = \mathsf{tt}$ und mit Lemma 2.1.5 damit auch $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt}$, was zu zeigen war.

d) $\models A$ genau dann, wenn $\models^0 A$.

Lösung: Folgt unmittelbar aus Teilaufgabe (f) mit $\mathcal{F} = \emptyset$.

Informell beschrieben: Es ist klar, daß aus $\models A$ auch $\models^0 A$ folgt. Warum gilt $\models^0 A \Rightarrow \models A$? Nehmen wir an, es gälte nicht, also es gibt eine Formel A mit $\models^0 A$ und eine Struktur $\mathsf{K} = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ mit $\not\models_{\mathsf{K}} A$, d.h. es gibt ein $i > 0$ mit $K_i(A) = \mathsf{ff}$. Betrachte nun die Struktur $\mathsf{K}^i = (\eta_i, \eta_{i+1}, \ldots)$. Offensichtlich gilt $\mathsf{K}^i_0(A) = \mathsf{ff}$, also $\not\models^0_{\mathsf{K}^i} A$, Widerspruch zu $\models^0 A$.

Aufgabe 6-4 **Semantik von $\mathcal{L}_{FOL}$** (4 Punkte)

Sei $SIG = (\mathbf{S}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ eine prädikatenlogische Signatur mit

- $\mathbf{S} = \{N\}$,
- $\mathbf{F} = \{0^{(\varepsilon, N)}, succ^{(N,N)}\}$,
- $\mathbf{P} = \{<^{(N\,N)}\}$ (wir schreiben $a < b$ für $<(a, b)$).

Als Abkürzung sei $a \leq b$ definiert als $(a < b \vee a = b)$. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

a) $\exists x \forall y (x < y) \rightarrow \forall y \exists x (x < y)$.

Lösung: Allgemeingültig, informell: Wenn es ein x gibt, daß für alle y eine Eigenschaft erfüllt, dann findet sich natürlich auch für jedes y ein solches x - nämlich genau das genannte.

Formell: Seien S, ξ beliebig, gelte $\exists x \forall y (x < y)$, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathsf{S}^{(\xi)}(\exists x \forall y (x < y)) = \mathsf{tt} \\
\text{gdw. } &\mathsf{S}^{(\xi')}(\forall y (x < y)) = \mathsf{tt} \text{ für ein } \xi' \text{ mit } \xi \sim_x \xi' \\
\text{gdw. } &\mathsf{S}^{(\xi'')}(x < y) = \mathsf{tt} \text{ für alle } \xi'' \text{ mit } \xi' \sim_y \xi'' \text{ für ein } \xi' \text{ mit } \xi \sim_x \xi' \\
\text{gdw. } &\xi''(x) <^{\mathsf{S}} \xi''(y) \text{ für alle } \xi'' \text{ mit } \xi' \sim_y \xi'' \text{ für ein } \xi' \text{ mit } \xi \sim_x \xi' \qquad (*)
\end{aligned}$$

Setze $\phi = \xi'(x)$. Nach $(*)$ folgt, daß $\phi <^{\mathsf{S}} \xi'(y)$ für alle $\xi' \sim_y \xi$.

$$\begin{aligned}
&\text{also } \xi''(x) <^{\mathsf{S}} \xi''(y) \text{ für ein } \xi'' \text{ mit } \xi'' \sim_x \xi' \text{ für alle } \xi' \text{ mit } \xi' \sim_y \xi \\
&\text{also } \mathsf{S}^{(\xi'')}(x < y) = \mathsf{tt} \text{ für ein } \xi'' \text{ mit } \xi'' \sim_x \xi' \text{ für alle } \xi' \text{ mit } \xi' \sim_y \xi \\
&\text{also } \mathsf{S}^{(\xi')}(\exists x (x < y)) = \mathsf{tt} \text{ für alle } \xi' \text{ mit } \xi' \sim_y \xi \\
&\text{also } \mathsf{S}^{(\xi)}(\forall y \exists x (x < y)) = \mathsf{tt}
\end{aligned}$$

b) $\exists x \forall y (y \leq x) \vee \forall x \exists y (x < y)$.

Lösung: Nicht allgemeingültig. Wähle S mit $|\mathsf{S}| = |\mathsf{S}|_N = \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}
<^{\mathsf{S}} &= \text{“konstant falsch”} \\
succ^{\mathsf{S}} &= \text{“plus eins”}
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathsf{S}^{(\xi)}((\exists x \forall y (y \leq x)) \vee (\forall x \exists y (x < y)) = \mathsf{tt} \\
\text{gdw. } &\mathsf{S}^{(\xi)}(\exists x \forall y (y \leq x)) = \mathsf{tt} \text{ oder } \mathsf{S}^{(\xi)}(\forall x \exists y (x < y)) = \mathsf{tt} \\
\text{gdw. } &\mathsf{S}^{(\xi_1')}(\forall y (y \leq x)) = \mathsf{tt} \text{ für ein } \xi_1' \text{ mit } \xi \sim^x \xi_1' \text{ oder } \mathsf{S}^{(\xi_2')}(\exists y (x < y)) = \mathsf{tt} \text{ für alle } \xi_2' \text{ mit } \xi \sim_x \xi_2' \\
\text{gdw. } &\mathsf{S}^{(\xi_1'')}(y \leq x) = \mathsf{tt} \text{ für alle } \xi_1'' \text{ mit } \xi_1' \sim_y \xi_1'' \text{ für ein } \xi_1' \text{ mit } \xi \sim_x \xi_1' \\
&\quad \text{oder } \mathsf{S}^{(\xi_2'')}(x < y) = \mathsf{tt} \text{ für ein } \xi_2'' \text{ mit } \xi_2' \sim_y \xi_2'' \text{ für alle } \xi_2' \text{ mit } \xi \sim_x \xi_2' \\
\text{gdw. } &\xi_1''(y) \leq^{\mathsf{S}} \xi_1''(x) \text{ für alle } \xi_1'' \text{ mit } \xi_1' \sim_y \xi_1'' \text{ für ein } \xi_1' \text{ mit } \xi \sim_x \xi_1' \\
&\quad \text{oder } \xi_2''(x) <^{\mathsf{S}} \xi_2''(y) \text{ für ein } \xi_2'' \text{ mit } \xi_2' \sim_y \xi_2'' \text{ für alle } \xi_2' \text{ mit } \xi \sim_x \xi_2' \\
\text{gdw. } &\xi_1''(y) = \xi_1''(x) \text{ für alle } \xi_1'' \text{ mit } \xi_1' \sim_y \xi_1'' \text{ für ein } \xi_1' \text{ mit } \xi \sim_x \xi_1' \\
\text{dann insb. } &\xi_1''(y) = \xi_1''(x) \text{ für } \xi_1'' \sim \xi'_{1(y \mapsto succ(x))} \text{ für ein } \xi_1' \text{ mit } \xi \sim_x \xi_1' \\
\text{und damit } &\xi_1'(x) + 1 = \xi_1'(x) \text{ für ein } \xi_1' \text{ mit } \xi \sim_x \xi_1' \\
&\text{und damit nicht allgemeingültig.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6-5 **Herleitungen in der Prädikatenlogik** (keine Abgabe)

Beweisen Sie folgende Aussagen für das System Σ_{FOL}. Sie dürfen in Ihren Herleitungen nur die Axiome und Regeln des Systems und folgende Regeln verwenden:

$$\begin{array}{ll}
(\neg\neg) & \vdash A \rightarrow \neg\neg A, \\
(\mathrm{KP}) & \vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A), \\
(\mathrm{KS}) & A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C.
\end{array}$$

a) $A \vdash \forall x A$.

Lösung: Wir benennen die Axiome und Regeln von Σ_{PL} und Σ_{FOL} wie folgt:

(pl1)	$A \to (B \to A)$
(pl2)	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(pl3)	$((A \to \textbf{false}) \to \textbf{false}) \to A$
$(\exists I)$	$A_x(t) \to \exists x A$
(eq1)	$x = x$
(eq2)	$x = y \to (A \to A_x(y))$
(mp)	$A, A \to B \vdash B$
(part)	$A \to B \vdash \exists x A \to B$ falls x in B nicht frei vorkommt *(Partikularisierung)*

Man beachte, dass $\forall x A$ eine Abkürzung von $(\exists x \neg A) \to \textbf{false}$ ist.

(1)	A	Annahme
(2)	$A \to (\neg A \to \textbf{false})$	$(\neg\neg)$
(3)	$\neg A \to \textbf{false}$	(mp)(2)
(4)	$(\exists x \neg A) \to \textbf{false}$	(part)(3)

b) $\vdash x = y \to y = x$.

Lösung:

(1)	$x = y \to (\neg(y = x) \to \neg(y = y))$	(eq2)
(2)	$(\neg(y = x) \to \neg(y = y)) \to (y = y \to y = x)$	(KP)
(3)	$x = y \to (y = y \to y = x)$	(KS)(1)(2)
(4)	$(x = y \to (y = y \to y = x)) \to ((x = y \to y = y) \to (x = y \to y = x))$	(pl2)
(5)	$(x = y \to y = y) \to (x = y \to y = x)$	(mp)(3)(4)
(6)	$y = y$	(eq1)
(7)	$y = y \to (x = y \to y = y)$	(pl1)
(8)	$y = y \to (x = y \to y = x)$	(KS)(7)(5)
(9)	$x = y \to y = x$	(mp)(6)(8)

Aufgabe 6-6 Einbettung der Temporallogik in klassische Prädikatenlogik (keine Abgabe)

Gegeben sei eine Sprache $\mathcal{L}_{\text{LTL}}(\mathbf{V})$ der temporalen Aussagenlogik. Die prädikatenlogische Signatur $SIG^T = (\mathbf{S}^T, \mathbf{F}^T, \mathbf{P}^T)$ sei wie folgt definiert:

- $\mathbf{S}^T = \{TIME\}$,
- $\mathbf{F}^T = \{0^{(\varepsilon, TIME)}, succ^{(TIME, TIME)}\}$,
- $\mathbf{P}^T = \{<^{(TIME\ TIME)}\} \cup \{\overline{v}^{(TIME)} : v \in \mathbf{V}\}$.

Eine Struktur S für $\mathcal{L}_{\text{FOL}}(SIG^T)$ heißt *Standardstruktur*, wenn die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die Trägermenge $|\mathsf{S}|_{TIME}$ bilden und wenn 0, *succ* und $<$ als die Null, die Nachfolgerfunktion und die „kleiner als"-Relation auf den natürlichen Zahlen interpretiert werden.

Zu einer temporalen Struktur $\mathsf{K} = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ für $\mathbf{V}$ definieren wir eine Standardstruktur $\mathsf{S_K}$ für SIG^T durch

$$\overline{v}^{\mathsf{S_K}}(i) = \mathsf{tt} \qquad \text{gdw.} \qquad \eta_i(v) = \mathsf{tt}$$

für alle $v \in \mathbf{V}$ und alle $i \in \mathbb{N}$.

Geben Sie eine Übersetzungsvorschrift an, die jeder Formel F von $\mathcal{L}_{\text{LTL}}(\mathbf{V})$ eine Formel $\overline{F}$ von $\mathcal{L}_{\text{FOL}}(SIG^T)$ mit einer freien Variablen x zuordnet, so dass für alle Formeln F, alle temporalen Strukturen K für $\mathbf{V}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathsf{K}_i(F) = \mathsf{tt} \qquad \text{gdw.} \qquad \models_{\mathsf{S_K}} \overline{F}_x(\underline{i}),$$

wobei $\underline{i}$ den Term bezeichnet, der durch i-malige Anwendung von *succ* auf 0 entsteht.

Lösung: Durch die Definition von $\mathsf{S_K}$ ist nahegelegt, atomare Formeln v aus $\mathcal{L}_{\mathrm{LTL}}$ durch prädikatenlogische Formeln $\overline{v}(x)$ zu übersetzen. Die Verallgemeinerung auf beliebige $\mathcal{L}_{\mathrm{LTL}}$-Formeln erreicht man durch eine induktive Definition, welche die Semantik der temporalen Aussagenlogik nachbildet:

$$\begin{aligned} ST(v) &= \overline{v}(x) \\ ST(\textbf{false}) &= \textbf{false} \\ ST(F \to G) &= ST(F) \to ST(G) \\ ST(\circ F) &= (ST(F))_x(\mathit{succ}(x)) \\ ST(\Box F) &= \forall y(x \leq y \to (ST(F))_x(y)) \end{aligned}$$

wobei $x \leq y$ eine Abkürzung für $x < y \vee x = y$ ist. Übersetzungen für abgeleitete Operatoren ergeben sich durch Einsetzen in diese Definition, z.B. ist

$$ST(\Diamond F) \quad \text{äquivalent zu} \quad \exists y(x \leq y \wedge (ST(F))_x(y))$$

Wir beweisen die Behauptung $\mathsf{K}_i(F) = \mathsf{tt}$ gdw. $\models_{\mathsf{S_K}} ST(F)_x(\underline{i})$ durch Induktion über den Formelaufbau von F. Beachten Sie dabei, dass die Formel $ST(F)_x(\underline{i})$ keine freien Variablen enthält, daher gilt insbesondere $\not\models_{\mathsf{S_K}} ST(F)_x(\underline{i})$ genau dann, wenn $\models_{\mathsf{S_K}} \neg ST(F)_x(\underline{i})$ gilt.

$F \equiv v$: unmittelbar nach Definition von $ST(v)$ und $\mathsf{S_K}$.

$F \equiv \textbf{false}$: trivial

$F \equiv G \to H$:

	$\mathsf{K}_i(G \to H) = \mathsf{tt}$	
gdw.	$\mathsf{K}_i(G) = \mathsf{ff}$ oder $\mathsf{K}_i(H) = \mathsf{tt}$	
gdw.	$\not\models_{\mathsf{S_K}} ST(G)_x(\underline{i})$ oder $\models_{\mathsf{S_K}} ST(H)_x(\underline{i})$	(nach Ind.ann.)
gdw.	$\models_{\mathsf{S_K}} ST(G \to H)_x(\underline{i})$	(nach obiger Bemerkung).

$F \equiv \circ G$:

	$\mathsf{K}_i(\circ G) = \mathsf{tt}$	
gdw.	$\mathsf{K}_{i+1}(G) = \mathsf{tt}$	
gdw.	$\models_{\mathsf{S_K}} ST(G)_x(\mathit{succ}(\underline{i}))$	(Ind.ann., $\mathsf{S_K}$ Standardstruktur)
gdw.	$\models_{\mathsf{S_K}} (ST(G)_x(\mathit{succ}(x)))_x(\underline{i})$	
gdw.	$\models_{\mathsf{S_K}} ST(\circ G)_x(\underline{i})$.	

$F \equiv \Box G$:

	$\mathsf{K}_i(\Box G) = \mathsf{tt}$	
gdw.	$\mathsf{K}_j(G) = \mathsf{tt}$ für alle $j \geq i$	
gdw.	$\models_{\mathsf{S_K}} ST(G)_x(\underline{j})$ für alle $j \geq i$	(nach Ind.ann.)
gdw.	$\models_{\mathsf{S_K}} \forall y(x \leq y \to ST(G)_x(y))_x(\underline{i})$	(weil $\mathsf{S_K}$ Standardstruktur)
gdw.	$\models_{\mathsf{S_K}} ST(\Box G)_x(\underline{i})$.	

Abgabe: Mittwoch, den 29.11.2006, vor der Übung.