Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, M. Hammer

WS 2006/2007
Übungsblatt 7

Temporale Logik und Zustandssysteme Lösungsvorschlag

Aufgabe 7-1 **Herleitungen in der Prädikatenlogik** (6 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen für das System Σ_{FOL}. Sie dürfen in Ihren Herleitungen neben den in Aufgabe 6-5 hergeleiteten Regeln nur die Axiome und Regeln des Systems Σ_{FOL} und folgende Regeln verwenden:

$$\begin{array}{ll} (\neg\neg) & \vdash A \to \neg\neg A, \\ (\mathrm{KP}) & \vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A), \\ (\mathrm{KS}) & A \to B, B \to C \vdash A \to C. \end{array}$$

a) $\vdash \forall x A \to A_x(t)$.

Lösung:

(1)	$\neg A_x(t) \to \exists x \neg A$	$(\exists I)$
(2)	$\exists x \neg A \to \neg\neg\exists x \neg A$	$(\neg\neg)$
(3)	$\neg A_x(t) \to \neg\neg\exists x \neg A$	(KS)(1)(2)
(4)	$(\neg A_x(t) \to \neg\neg\exists x \neg A) \to (\neg\exists x \neg A \to A_x(t))$	(KP)
(5)	$\neg\exists x \neg A \to A_x(t)$	(mp)(3)(4)

Da $\neg\exists x \neg A$ gerade $\forall x A$ ist, ist die Behauptung damit gezeigt.

b) $\vdash t = t$ für beliebigen Term t.

Lösung:

(1)	$\forall x(x = x) \to t = t$	(7-1-a)
(2)	$x = x$	(eq1)
(3)	$\forall x(x = x)$	(6-5-a)(2)
(4)	$t = t$	(mp)(1)(3)

c) $\vdash t_1 = t_2 \to t_2 = t_1$ für beliebige Terme t_1, t_2.

Lösung:

(1)	$x = y \to y = x$	(6-5-b)
(2)	$\forall x(x = y \to y = x)$	(6-5-a)(1)
(3)	$(\forall x(x = y \to y = x)) \to (t_1 = y \to y = t_1)$	(7-1-a)
(4)	$t_1 = y \to y = t_1$	(mp)(2)(3)
(5)	$\forall y(t_1 = y \to y = t_1)$	(6-5-a)(4)
(6)	$(\forall y(t_1 = y \to y = t_1)) \to (t_1 = t_2 \to t_2 = t_1)$	(7-1-a)
(7)	$t_1 = t_2 \to t_2 = t_1$	(mp)(5)(6)

Aufgabe 7-2 **Herleitung in der Peano-Arithmetik** (3 Punkte)

Die Theorie der natürlichen Zahlen (die Peano-Arithmetik) hat folgende Axiome:

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{PA1}) & \mathit{SUCC}(x) \neq 0, \\ (\mathrm{PA2}) & \mathit{SUCC}(x) = \mathit{SUCC}(y) \to x = y, \\ (\mathrm{PA3}) & x + 0 = x, \\ (\mathrm{PA4}) & x + \mathit{SUCC}(y) = \mathit{SUCC}(x + y), \\ (\mathrm{PA5}) & x * 0 = 0, \\ (\mathrm{PA6}) & x * \mathit{SUCC}(y) = (x * y) + x, \\ (\mathrm{PAInd}) & (A_x(0) \land \forall x(A \to A_x(\mathit{SUCC}(x)))) \to \forall x A. \end{array}$$

Leiten Sie folgende in der Peano-Arithmetik gültigen Formeln her. Neben den angegebenen Axiomen und den Axiomen und Regeln von Σ_{FOL} dürfen Sie die (analog wie in LTL gegebene) Regel (prop), zuvor selbst hergeleitete Formeln und Regeln, die Ergebnisse von Aufgabe 6-5 und Aufgabe 7-1 sowie folgende Formeln verwenden:

(eq3) $t_1 = t_2 \to t_x(t_1) = t_x(t_2)$,
(trans) $t_1 = t_2 \land t_2 = t_3 \to t_1 = t_3$.

für beliebige Terme t, t_1, t_2, t_3 und beliebige Variable x. ($t_x(t')$ ist analog definiert wie $A_x(t')$.)

a) $0 + x = x$. (keine Abgabe)

Lösung: Zunächst leiten wir folgende Regel her:

(subst) $A \vdash A_x(t)$

(1)	A	(Annahme)
(2)	$\forall x A$	(6-5a))(1)
(3)	$\forall x A \to A_x(t)$	(7-1a))
(4)	$A_x(t)$	(mp)(2)(3)

Jetzt die Herleitung der Formel:

(1)	$0 + s(x) = s(0 + x)$	(PA4)(subst)
(2)	$0 + x = x \to s(0 + x) = s(x)$	(eq3)
(3)	$0 + x = x \to 0 + s(x) = s(x)$	(1)(2)(trans)(prop)
(4)	$\forall x(0 + x = x \to 0 + s(x) = s(x))$	(6-5a))(3)
(5)	$0 + 0 = 0$	(PA3)(subst)
(6)	$(0 + x = 0)_x(0) \land \forall x(0 + x = x \to (0 + x = x)_x(s(x))$	(5)(4)(prop)
(7)	$\forall x(0 + x = x)$	(PAInd)(6)(mp)
(8)	$\forall x(0 + x = x) \to 0 + x = x$	(7-1a))
(9)	$0 + x = x$	(mp)(8)(7)

b) $0 * x = 0$. (3 Punkte)

Lösung:

(1)	$0 * s(x) = (0 * x) + 0$	(PA6)(subst)
(2)	$0 * x = 0 \to (0 * x) + 0 = 0 + 0$	(eq3)
(3)	$0 + 0 = 0$	(PA3)(subst)
(4)	$0 * x = 0 \to (0 * x) + 0 = 0$	(2)(3)(trans)(prop)
(5)	$0 * x = 0 \to 0 * s(x) = 0$	(1)(4)(trans)(prop)
(6)	$\forall x(0 * x = 0 \to 0 * s(x) = 0)$	(6-5a))(5)
(7)	$0 * 0 = 0$	(PA5)(subst)
(8)	$0 * 0 = 0 \land \forall x(0 * x = 0 \to 0 * s(x) = 0)$	(6)(8)(prop)
(9)	$\forall x(0 * x = 0)$	(PAInd)(8)(mp)
(10)	$\forall x(0 * x = 0) \to 0 * x = 0$	(7-1a))
(11)	$0 * x = 0$	(mp)(9)(10)

c) $x * s(s(0)) = x + x$. (keine Abgabe)

Lösung:

(1)	$x*s(s(0)) = (x*s(0))+x$	(PA6)(subst)
(2)	$x*s(0) = (x*0)+x$	(PA6)(subst)
(3)	$x*0 = 0$	(PA5)
(4)	$(x*0)+x = 0+x$	(3)(eq3)(prop)
(5)	$0+x = x$	(Teilaufg. a))
(6)	$x*s(0) = x$	(2)(4)(5)(trans)(prop)
(7)	$(x*s(0))+x = x+x$	(6)(eq3)(prop)
(8)	$x*s(s(0)) = x+x$	(1)(7)(trans)(prop)

Aufgabe 7-3 **Allgemeingültige Formeln in FOLTL** (4 Punkte)

Welche der folgenden Formeln von $\mathcal{L}_{\text{FOLTL}}$ sind allgemeingültig? (Es seien $a, b \in \mathbf{X}$ und $x, y \in \mathcal{X}$.) Begründen Sie Ihre Aussagen.

a) $x = y \to \Box(x = y)$.

Lösung: $x = y \to \Box(x = y)$ ist allgemeingültig: Da x, y rigide Variablen sind, ist ihre Interpretation zustandsunabhängig, also ist $\mathsf{S}^{(\xi,\eta_i)}(x) = \xi(x)$ für alle i, und analog für y.

b) $\Diamond\Box\forall xA \to \forall x\Diamond\Box A$.

Lösung: allgemeingültig: Es sei $\mathsf{K} = (\mathsf{S}, \mathsf{W})$ eine temporale Struktur, ξ eine Variablenbelegung und $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{K}_i^{(\xi)}(\Diamond\Box\forall xA) = \mathsf{tt} \\ \Longrightarrow & \text{es gibt } j \geq i \text{ mit } \mathsf{K}_k^{(\xi)}(\forall xA) = \mathsf{tt} \text{ für alle } k \geq j \\ \Longrightarrow & \text{es gibt } j \geq i\text{, so dass für alle } k \geq j \text{ und alle } \xi' \text{ mit } \xi' \sim_x \xi \text{ gilt: } \mathsf{K}_k^{(\xi')}(A) = \mathsf{tt} \\ \overset{(*)}{\Longrightarrow} & \text{für alle } \xi' \text{ mit } \xi' \sim_x \xi \text{ gibt es } j \geq i\text{, so dass für alle } k \geq j \text{ gilt: } \mathsf{K}_k^{(\xi')}(A) = \mathsf{tt} \\ \Longrightarrow & \mathsf{K}_i^{(\xi)}(\forall x\Diamond\Box A) = \mathsf{tt} \end{array}$$

Die Folgerung $(*)$ ist richtig, weil “es gibt … für alle” stärker ist als “für alle … es gibt”.

c) $\forall x\Diamond\Box A \to \Diamond\Box\forall xA$.

Lösung: nicht allgemeingültig: Es sei A die Formel $a > x$ (für ein flexibles Individuenkonstante a), S sei eine Struktur für die natürlichen Zahlen mit $\mathsf{S}(>) =$ “größer als”, und $\mathsf{W} = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ sei eine Folge von Zuständen mit $\eta_i(a) = i$. Dann ist $\mathsf{K}_0^{(\xi)}(\forall x\Diamond\Box(a > x)) = \mathsf{tt}$ für beliebige Belegung ξ, denn für jede natürliche Zahl x gilt $\eta_j(a) > x$ für alle $j > x$. Jedoch gilt $\mathsf{K}_0^{(\xi)}(\Diamond\Box\forall x\, a > x) = \mathsf{ff}$, denn für alle i ist $\eta_i(a) \leq i$.

Bemerkung: Hierbei ist wesentlich, dass über eine unendliche Wertemenge quantifiziert wird: Es gilt $\models \Diamond\Box A \wedge \Diamond\Box B \leftrightarrow \Diamond\Box(A \wedge B)$, und allgemeiner kommutieren $\forall$ und $\Diamond\Box$ für endliche Wertebereiche.

d) $\forall x\Diamond A \to \Diamond\forall xA$.

Lösung: Diese Formel ist nicht allgemeingültig. Als Gegenbeispiel betrachte die Formel $A \equiv x = a$ und die Struktur $\mathsf{K} = (\mathsf{S}, \mathsf{W})$ mit $|\mathsf{S}|_N = \mathbb{N}$, $\mathsf{W} = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ mit $\eta_i(a) = i$ und sei ξ eine beliebige Variablenbelegung.

Dann gilt:

$$\mathsf{K}_0^{(\xi)}(\forall x\Diamond(x = a)) = \mathsf{tt}$$

gdw. $\mathsf{K}_0^{(\xi')}(\Diamond(x = a)) = \mathsf{tt}$ für alle $\xi' \sim_x \xi$

gdw. für alle $\xi' \sim_x \xi$ gibt es ein $i \geq 0$ mit $\mathsf{K}_i^{(\xi')}(x = a) = \mathsf{tt}$

gdw. für alle $\xi' \sim_x \xi$ gibt es ein $i \geq 0$ mit $\xi'(x) = \eta_i(a)$

gdw. für alle $\xi' \sim_x \xi$ gibt es ein $i \geq 0$ mit $\xi'(x) = i$

Da jedes $\xi'(x)$ eine natürliche Zahl ist, gilt die Aussage in der letzten Zeile offensichtlich. Also gilt $\mathsf{K}_0^{(\xi)}(\forall x\Diamond(x = a)) = \mathsf{tt}$. Jetzt zeigen wir, dass $\mathsf{K}_0^{(\xi)}(\Diamond\forall x(x = a)) = \mathsf{ff}$.

$\mathsf{K}_0^{(\xi)}(\Diamond\forall x(x=a)) = \mathsf{ff}$

gdw. $\mathsf{K}_i^{(\xi)}(\forall x(x=a)) = \mathsf{ff}$ für alle $i \geq 0$

gdw. für alle $i \geq 0$ gibt es ein $\xi' \sim_x \xi$ mit $\mathsf{K}_i^{(\xi')}(x=a) = \mathsf{ff}$

gdw. für alle $i \geq 0$ gibt es ein $\xi' \sim_x \xi$ mit $\xi'(x) \neq \eta_i(a)$

gdw. für alle $i \geq 0$ gibt es ein $\xi' \sim_x \xi$ mit $\xi'(x) \neq i$

Die Aussage in der letzten Zeile ist offenbar erfüllt, man kann für irgendein $j \in \mathbb{N}$, $j \neq i$ einfach $\xi'(x) = j$ wählen.

Damit gilt insgesamt $\mathsf{K}_0(\xi)(\forall x\Diamond A \to \Diamond\forall xA) = \mathsf{ff}$, die Formel ist also nicht allgemeingültig.

Abgabe: Mittwoch, den 6.12.2006, vor der Übung.