Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, M. Hammer

WS 2006/2007
Übungsblatt 13

Temporale Logik und Zustandssysteme Lösungsvorschlag

Aufgabe 13-1 **Stotteräquivalenz in TLA** (5 Punkte)

Wir betrachten die Formel $F_{\Gamma_{impl}} \equiv \exists^{\text{st}} dez \Box [A_{\Gamma_{implcount}}]_{ein,c,dez}$ auf S. 77 des Skriptums und $\mathsf{W} = (\eta_0, \eta_1, \dots)$ folgende Folge von Zuständen:

	η_0	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9	η_{10}	η_{11}	η_{12}	η_{13}
ein	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt
c	17	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	19
dez	5	13	2	0	3	6	9	7	4	10	8	3	6	12

Zeigen Sie, dass $F_{\Gamma_{impl}}$ in $\mathsf{K} = (\mathsf{N}, \mathsf{W})$ gilt, indem Sie Folgen $\overline{\mathsf{W}}$, $\overline{\mathsf{W}}'$ und W' angeben, so dass $\overline{\mathsf{W}} \simeq_{dez} \mathsf{W}$ gilt (wie auf S. 78 des Skriptums beschrieben).

Lösung:

W

	η_0	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9	η_{10}	η_{11}	η_{12}	η_{13}
ein	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt
c	17	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	19
dez	5	13	2	0	3	6	9	7	4	10	8	3	6	12

$\equiv_s$

W'

	η_0	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9	η_{10}	η_{11}	η_{12}	η_{13}	η_{14}	η_{15}	η_{16}	η_{17}	η_{18}	η_{19}	η_{20}	η_{21}	η_{22}
ein	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt
c	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	19
dez	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	13	2	0	3	6	9	7	4	10	8	3	6	12

$\sim_{dez}$

$\overline{\mathsf{W}}'$

	η_0	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9	η_{10}	η_{11}	η_{12}	η_{13}	η_{14}	η_{15}	η_{16}	η_{17}	η_{18}	η_{19}	η_{20}	η_{21}	η_{22}
ein	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt
c	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	19
dez	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	9	0

$\equiv_s$

$\overline{\mathsf{W}}$

	η_0	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9	η_{10}	η_{11}	η_{12}	η_{13}	η_{14}	η_{15}	η_{16}	η_{17}	η_{18}	η_{19}	η_{20}
ein	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt	tt
c	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	19
dez	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Aufgabe 13-2 **BTL-Formeln** (5 Punkte)

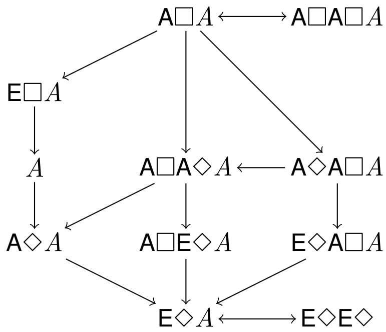
Sei A eine beliebige Formel aus $\mathcal{L}_{\text{BTL}}$. Gegeben sei die Menge

$$\mathcal{F}_A = \{A, \mathsf{A}\Box A, \mathsf{E}\Box A, \mathsf{A}\Diamond A, \mathsf{E}\Diamond A, \mathsf{A}\Box\mathsf{A}\Box A, \mathsf{A}\Box\mathsf{A}\Diamond A, \mathsf{A}\Box\mathsf{E}\Diamond A, \mathsf{E}\Diamond\mathsf{A}\Box A, \mathsf{A}\Diamond\mathsf{A}\Box A, \mathsf{E}\Diamond\mathsf{E}\Diamond A\}.$$

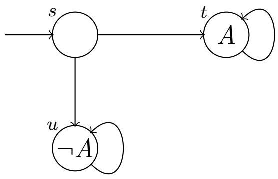
Geben Sie für alle $B, C \in \mathcal{F}_A$ an, ob $\models B \to C$ gilt. Stellen Sie die Abhängigkeiten in einem Diagramm dar.

Geben Sie dabei für die Implikationen $\mathsf{A}\Diamond\mathsf{A}\Box A \to \mathsf{A}\Box\mathsf{A}\Diamond A$ und $\mathsf{E}\Diamond\mathsf{A}\Box A \to \mathsf{A}\Box\mathsf{E}\Diamond A$ einen Beweis oder eine Widerlegung an. Für die anderen Implikationen brauchen Sie keine Beweise/Widerlegungen anzugeben.

Lösung: Man erhält folgendes Diagramm, wenn man transitive Beziehungen weglässt:



- $\mathsf{A}\Diamond\mathsf{A}\Box A \rightarrow \mathsf{A}\Box\mathsf{A}\Diamond A$: Es sei $\mathsf{K} = (\{\eta_\iota\}_{\iota \in I}, \twoheadrightarrow)$ eine beliebige Kripke-Struktur und $\iota \in I$ ein Zustand. Weiter gelte $\mathsf{K}_\iota(\mathsf{A}\Diamond\mathsf{A}\Box A) = \mathsf{tt}$; wir müssen zeigen, dass dann auch $\mathsf{K}_\iota(\mathsf{A}\Box\mathsf{A}\Diamond A) = \mathsf{tt}$ gilt. Dazu sei $\sigma = s_0 s_1 s_2 \dots$ mit $s_0 = \iota$ ein von ι ausgehender Pfad in K und $j \in \mathbb{N}$ sei beliebig gewählt; zu zeigen ist $\mathsf{K}_{s_j}(\mathsf{A}\Diamond A) = \mathsf{tt}$. Also sei $\tau = t_0 t_1 t_2 \dots$ mit $t_0 = s_j$ ein beliebiger von s_j ausgehender Pfad in K; wir müssen zeigen, dass ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathsf{K}_{t_l}(A) = \mathsf{tt}$. Betrachte dazu den Pfad $\rho = s_0 \dots s_{j-1} t_0 t_1 \dots$; wir schreiben dafür auch $\rho = r_0 r_1 \dots$. Wegen der Voraussetzung $\mathsf{K}_\iota(\mathsf{A}\Diamond\mathsf{A}\Box A) = \mathsf{tt}$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $\mathsf{K}_{r_k}(\mathsf{A}\Box A) = \mathsf{tt}$ gilt, und daher folgt insbesondere $\mathsf{K}_{r_l}(A) = \mathsf{tt}$ für alle $l \geq k$. Dies genügt für den Beweis der Behauptung.
- Das folgende Diagramm zeigt ein Gegenbeispiel zur Implikation $\mathsf{E}\Diamond\mathsf{A}\Box A \rightarrow \mathsf{A}\Box\mathsf{E}\Diamond A$:

  Für den Zustand s der angegebenen Struktur gilt $\mathsf{K}_s(\mathsf{E}\Diamond\mathsf{A}\Box A) = \mathsf{tt}$, denn der von s aus erreichbare Zustand t erfüllt die Formel $\mathsf{A}\Box p$. Andererseits gilt *nicht* $\mathsf{K}_s(\mathsf{A}\Box\mathsf{E}\Diamond A) = \mathsf{tt}$, denn der von s aus erreichbare Zustand u erfüllt die Formel $\neg\mathsf{E}\Diamond A$.

Aufgabe 13-3 **Allgemeingütligkeit von CTL-Formeln** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden CTL-Formel allgemeingültig ist:

- $A\ \mathsf{E}\textbf{until}\ B \leftrightarrow B \vee (A \wedge \mathsf{E}\bigcirc(A\ \mathsf{E}\,\textbf{until}\ B))$.

  Lösung: Gelte zunächst $\mathsf{K}_\eta(A\ \mathsf{E}\textbf{until}\ B) = \mathsf{tt}$. Für den Fall $\mathsf{K}_\eta(B) = \mathsf{ff}$ ist zu zeigen dass $\mathsf{K}_\eta(A \wedge \mathsf{E}\bigcirc(A\ \mathsf{E}\textbf{until}\ B)) = \mathsf{tt}$. Nach Voraussetzung gibt es einen η-Pfad $(\eta_0, \eta_1, \dots)$ mit $\eta = \eta_0$ und ein $0 \leq j$ mit $\mathsf{K}_{\eta_j}(B) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{K}_{\eta_i}(A) = \mathsf{tt}$ für alle $0 \leq i < j$. Nachdem $\mathsf{K}_\eta(B) = \mathsf{ff}$ folgt $j \geq 1$. Damit gibt es also einen η'-Pfad $(\eta_1, \eta_2, \dots)$ mit $\eta' = \eta_1$ und $\mathsf{K}_{\eta'}(A\ \mathsf{E}\textbf{until}\ B) = \mathsf{tt}$. Weil $\eta \twoheadrightarrow \eta'$ ausserdem $\mathsf{K}_\eta(\mathsf{E}\bigcirc(A\ \mathsf{E}\textbf{until}\ B)) = \mathsf{tt}$. Nachdem $\mathsf{K}_\eta(B) = \mathsf{ff}$ muss ausserdem $\mathsf{K}_\eta(A) = \mathsf{tt}$ gelten, da ansonsten $\mathsf{K}_\eta(A\ \mathsf{E}\textbf{until}\ B) = \mathsf{ff}$.

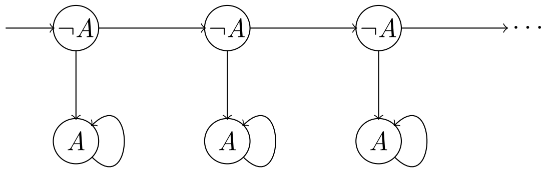
  Gelte nun $\mathsf{K}_\eta(B \vee (A \wedge \mathsf{E}\bigcirc(A\ \mathsf{E}\textbf{until}\ B)) = \mathsf{tt}$. Im Fall $\mathsf{K}_\eta(B) = \mathsf{tt}$ sind wir fertig. Anderenfalls gilt $\mathsf{K}_\eta(A) = \mathsf{tt}$ und es gibt η' mit $\eta \twoheadrightarrow \eta'$ und $\mathsf{K}_{\eta'}(A\ \mathsf{E}\textbf{until}\ B) = \mathsf{tt}$. Also gibt es einen η'-Pfad $(\eta_1, \eta_2, \dots)$ und ein $1 \leq i \leq n$ mit $\mathsf{K}_{\eta_i}(B) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{K}_{\eta_j}(A) = \mathsf{tt}$ für alle $1 \leq i < j$. Für $\eta_0 = \eta$ ist $(\eta_0, \eta_1, \dots)$ also ein η-Pfad und es gibt $j \geq 0$ mit $\mathsf{K}_j(B) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt}$ für alle $0 \leq i < j$; für $j = 0$ folgt dies aus $\mathsf{K}_\eta(A) = \mathsf{tt}$.

Aufgabe 13-4 **CTL und LTL** (keine Abgabe)

Zeigen Sie: Es gibt eine Formel $F_1 \in \mathcal{L}_{\text{CTL}}$ für die es keine äquivalente Formel $F_1' \in \mathcal{L}_{\text{LTL}}$ gibt, und eine Formel $F_2 \in \mathcal{L}_{\text{LTL}}$, für die es keine äquivalente Formel in $\mathcal{L}_{\text{CTL}}$ gibt.

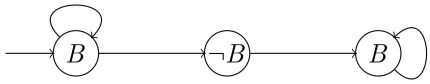
Lösung: Die klassischen Beispiele sind $F_1 \equiv \mathsf{A}\Box\mathsf{E}\Diamond A$, was z.B. für $A \equiv \mathit{terminated}$ Sinn macht, und $F_2 \equiv \Diamond\Box B$, wie man es in (schwacher) Fairness einsetzt.

Für F_1 betrachte man folgende Struktur K:



Es gilt $\mathsf{K} \models F_1$, aber es gilt auch $\mathsf{K} \not\models \Diamond A$ (Gegenbeispiel durch den Pfad, der die obere Reihe der Zustände nie verlässt), so daß eine Formel „A ist erreichbar" nicht formuliert werden kann (da $\Diamond A$ die schwächstmögliche solche Forderung ist).

Für F_2 betrachte man die Struktur K':



Offensichtlich gilt $\mathsf{K}' \models F_2$. Eine CTL-Formel F_2', die äquivalent zu F_2 wäre, dürfte keine Teilformel $\mathsf{E}\circledast$ mit $\circledast \in \{\Box, \Diamond, \circ\}$ enthalten, da LTL-Formeln immer über alle Pfade quantifizieren. Es gilt aber $\mathsf{K} \not\models \mathsf{A}\Diamond\mathsf{A}\Box B$, da es einen Pfad gibt (der im ersten Zustand verbleibt), so daß nicht auf allen Folgepfaden immer B gilt.

Abgabe: Mittwoch, den 31.1.2007, vor der Übung.