Übung 4 – Lexikographische Pfadordnung + Hausaufgaben

Formale Techniken in der Software-Entwicklung

Christian Kroiß

Beweis der Terminierung eines Termersetzungssystems:

- Für den *allgemeinen Fall* gilt: Terminierung eines TES unentscheidbar
  - Beweis durch Konstruktion eines TES, das eine beliebige Turingmaschine simuliert ➔ Reduktion auf Halteproblem
- In vielen Fällen lässt sich aber doch ein Verfahren finden, um Terminierung nachzuweisen!

Beweis der Terminierung

- Grundidee für Terminierungsbeweis: finde **noethersche Ordnung** für Terme

> “Eine **noethersche Ordnung** (auch wohlfundierte Menge, fundierte Ordnung, terminierende Ordnung) ist eine halbgeordnete Menge, die keine unendlichen echt absteigenden Ketten enthält. Äquivalent dazu heißt eine halbgeordnete Menge fundiert, wenn jede nichtleere Teilmenge mindestens ein minimales Element enthält.“

Definition:

Eine Ordnung $>_\tau$ heit **Termordnung** auf $T(\Sigma)$, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. Die Ordnung $>_\tau$ ist **transitiv**, d.h. für $t, t', t'' \in T(\Sigma)$ mit $t >_\tau t'$ und $t' >_\tau t''$ gilt $t >_\tau t''$.

2. Ist f eine k-stellige Funktion und sind $t_1, \ldots, t_k, t'_i$ Terme mit $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $t_i >_\tau t'_i$, so gilt
$f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n) >_\tau f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t'_i, t_{i+1}, \ldots, t_n)$.

3. Ist σ eine Substitution, $s, t \in T(\Sigma)$ mit $s >_\tau t$, so gilt $\sigma(s) >_\tau \sigma(t)$.

4. Die Ordnung $>_\tau$ is **Noethersch**, d.h. es gibt keine unendliche echt absteigende Kette von Termen $t_1 >_\tau t_2 >_\tau t_3, \ldots$.

Satz: Sei M eine Menge von Gleichungen, T die Menge der Terme und sei $\xrightarrow{M}$ das durch M definierte TES. Gibt es eine Termordnung $>_\tau$ auf T, so dass für jede Gleichung $F : s = t$ aus M die Ungleichung $s >_\tau t$ gilt, so ist $\xrightarrow{M}$ Noethersch.

Sei S eine endliche Signatur und $>$ eine Ordnung ihrer Funktionssymbole. Dann ist die **lexikographische Pfadordnung** $>_{lpo}$ über $T(\Sigma, V)$ rekursiv folgendermaßen definiert:

1) Seien $t \in T(\Sigma, V), x \in Var(t)$ und x verschieden von t, dann $t >_{lpo} x$.

2) $f(t_1, \ldots, t_n) >_{lpo} g(t'_1, \ldots, t'_m)$ wenn

entweder 2.1) $t_i >_{lpo} g(t'_1, \ldots, t'_m)$ für ein i,

oder 2.2) $f > g$ und $f(t_1, \ldots, t_n) >_{lpo} t'_j$, für alle j,

oder 2.3) $f = g, f(t_1, \ldots, t_n) >_{lpo} t'_j$, für alle j und es gibt ein i mit $t_j = t'_j$, für alle $j < i$, und $t_i >_{lpo} t'_i$.

Beispiel: Ackermann-Funktion

(a) $ack(0, y) = s(y)$

(b) $ack(s(x), 0) = ack(x, s(0))$

(c) $ack(s(x), s(y)) = ack(x, ack(s(x), y))$

Zum Beweis der Terminierung von ack wählt man ack > s > 0.
Dann gilt gür die Termersetzungsregeln von ack:

(a) $ack(0, y) >_{lpo} s(y)$
wegen 2.2 : Es gilt $ack > s$ und $ack(0, y) >_{lpo} y$ (wg 1).

(b) $ack(s(x), 0) >_{lpo} ack(x, s(0))$
wegen 2.3: Es gilt $s(x) >_{lpo} x$ (wg. 1) und $ack(s(x), 0) >_{lpo} s(0)$ (wg. 2.2 $ack > s$ und $ack(s(x), 0) >_{lpo} 0$ (wg. $ack > 0$)) .

Beispiel

(c) $ack(s(x), s(y)) >_{lpo} ack(x, ack(s(x), y))$
wegen 2.3 gilt:
(i) $s(x) >_{lpo} x$ (wg. 1)
(ii) $ack(s(x), s(y)) >_{lpo} ack(s(x), y)$
(durch rekursiver Anwendung von 2.3 und $s(y) >_{lpo} y$ aus 1).

Hausaufgabe 3-1

- Siehe Maude-Module auf der Homepage

Hausaufgabe 3-2

Definition: Let $l_i \to r_i, i = 1, 2$, be two rules whose variables have been renamed such that $Var(l_1, r_1) \cap Var(l_2, r_2) = \emptyset$.
Let $p \in Pos(l_1)$ be such that $l_1|_p$ is not a variable and let θ be an mgu of $l_1|_p =^? l_2$.

This determines a **critical pair** $\langle \theta r_1, (\theta l_1)[\theta r_2]_p \rangle$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \theta l_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\theta r_1 & & (\theta l_1)[\theta r_2]_p
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 3-2

Bestimmen Sie ein r_1 und ein r_2, so dass
$R = \{f(g(x)) \to r_1, g(h(x)) \to r_2\}$ konfluent ist.

1. Schritt: Umbenennung

$$R = \{f(g(x)) \to r_1, g(h(y)) \to r_2\}$$

$$l_1 = f(g(x))$$

$$l_2 = g(h(y))$$

Hausaufgabe 3-2

Die einzige in Frage kommende Position ist:
$l_1|_1 = g(x)$

Suche mgu für $l_1|_1 = g(x) =^? g(h(y))$.
Lösung: $\theta = \{x \mapsto h(y)\}$

Kritisches Paar:
$\langle \theta r_1, (\theta l_1)[\theta r_2]_1 \rangle = \langle \theta r_1, f(g(h(y)))[\theta r_2]_1 \rangle$

Hausaufgabe 3-2

Kritisches Paar:
$\langle \theta r_1, (\theta l_1)[\theta r_2]_1 \rangle = \langle \theta r_1, f(g(h(y)))[\theta r_2]_1 \rangle$

Bestimme also $r_1 = f(x), r_2 = h(y)$
Dann
$\langle \theta r_1, f(g(h(y)))[\theta r_2]_1 \rangle =$
$\langle f(x)[x \mapsto h(y)], f(g(h(y)))[h(y)]_1 \rangle =$
$\langle f(h(y)), f(h(y)) \rangle$