Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 2

Mit Dank an die Hilfe durch Herrn Georg Schneider.

Aufgabe 1

Gegeben sei folgende rekursive Prozessdeklaration:

P = (w → (z → P | k → P)).

Berechnen Sie die Semantik (d.h. das LTS) von P.

- Gegeben:
  - P ist ein Prozessidentifikator.
  - Es ist eine eine Prozessdeklaration gegeben: $P = E$.
    Also Angabe eines LTS für P möglich.

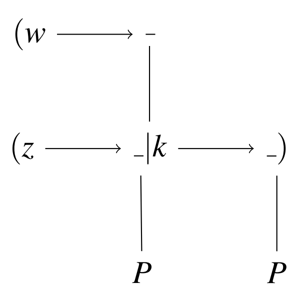
    $$P = \underbrace{(w \to (z \to P | k \to P))}_{E}$$

    * Da P in E als freie Variable vorkommt, handelt es sich hier um eine **rekursive Prozessdeklaration**.
- Gemäß der Definition der Semantik von Prozessausdrücken ist dann

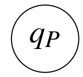
  $$\mathrm{lts}(P) =_{def} \mathrm{lts}(\mathrm{rec}(P = E))$$

- Wir berechnen nun das $\mathrm{lts}(\mathrm{rec}(P = E))$.
  - Das LTS wird gemäß der semantischen Regel für rekursive Prozessausdrücke berechnet. Dazu berechnen wir zunächst das LTS von E gemäß des Syntaxbaums von E von "unten nach oben".

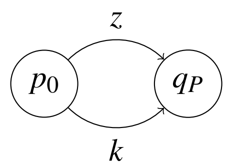
    Syntaxbaum von E:

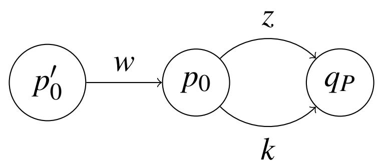
  - Wir setzen zunächst an:

$\text{lts}(P) =$ 

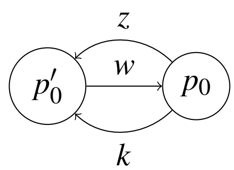
$A = \emptyset$

$\Rightarrow \text{lts}((z \to P | k \to P)) =$ 

$A = \{z, k\}$

$\Rightarrow \text{lts}(E) =$ 

$A = \{w, z, k\}$

$\Rightarrow \text{lts}(rec(P = E)) =$ 

$A = \{w, z, k\}$

- Vom vorletzten zum letzten Schritt wird der zunächst eingeführte Zustand q_P wieder entfernt und die Transitionen dorthin auf den Anfangszustand geführt.

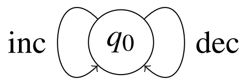
Aufgabe 2

Gegeben seien die folgenden drei Prozessdeklarationen:

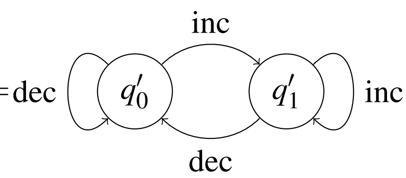
```
C0 = (inc -> C0 | dec -> C0).

C1 = C[0],
C[i:0..1] = (when (i<1) inc -> C[i+1]
            |when (i==1) inc -> C[i]
            |when (i>0) dec -> C[i-1]
            |when (i==0) dec -> C[i]).

C2 = C[0],
C[i:0..1] = (when (i<1) inc -> C[i+1]
            |when (i>0) dec -> C[i-1]).
```

Untersuchen Sie, welche der drei Prozesse stark äquivalent sind und beweisen Sie Ihre Aussage.

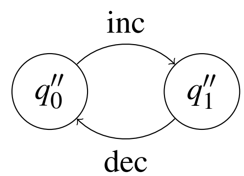
1. LTSe anzeichnen

$\text{lts}(C0) =$ 

$A0 = \{\text{inc,dec}\}$

$\text{lts}(C1) =$ 

$A1 = \{\text{inc,dec}\}$

$\text{lts}(C2) =$ 

$A2 = \{\text{inc,dec}\}$

2. Beh: $lts(C0) \sim lts(C1)$.
   (a) A0 = A1 = {inc,dec}
   (b) Beweis durch Koinduktion:

$$\text{Definiere: } R{=}\{(q_0,q'_0),(q_0,q'_1)\}$$
$$(q_0,q'_0) \in R\surd$$

Wir zeigen, dass R eine starke Bisimulation zwischen $lts(C0)$ und $lts(C1)$ ist.

i. Betrachte $(q_0,q'_0) \in R$:

$$(1)\ q_0 \xrightarrow{\text{inc}}_{\Delta 0} q_0. \text{ Es gibt } q'_0 \xrightarrow{\text{inc}}_{\Delta 1} q'_1 \text{ und } (q_0,q'_1) \in R$$
$$q_0 \xrightarrow{\text{dec}}_{\Delta 0} q_0. \text{ Es gibt } q'_0 \xrightarrow{\text{dec}}_{\Delta 1} q'_0 \text{ und } (q_0,q'_0) \in R$$
$$(2)\ q'_0 \xrightarrow{\text{inc}}_{\Delta 1} q'_1. \text{ Es gibt } q_0 \xrightarrow{\text{inc}}_{\Delta 0} q_0 \text{ und } (q_0,q'_1) \in R$$
$$q'_0 \xrightarrow{\text{dec}}_{\Delta 1} q'_0. \text{ Es gibt } q_0 \xrightarrow{\text{dec}}_{\Delta 0} q_0 \text{ und } (q_0,q'_0) \in R$$

ii. Betrachte $(q_0,q'_1) \in R$:

$$(1)\ q_0 \xrightarrow{\text{inc}}_{\Delta 0} q_0. \text{ Es gibt } q'_1 \xrightarrow{\text{inc}}_{\Delta 1} q'_1 \text{ und } (q_0,q'_1) \in R$$
$$q_0 \xrightarrow{\text{dec}}_{\Delta 0} q_0. \text{ Es gibt } q'_1 \xrightarrow{\text{dec}}_{\Delta 1} q'_0 \text{ und } (q_0,q'_0) \in R$$
$$(2)\ q'_1 \xrightarrow{\text{inc}}_{\Delta 1} q'_1. \text{ Es gibt } q_0 \xrightarrow{\text{inc}}_{\Delta 0} q_0 \text{ und } (q_0,q'_1) \in R$$
$$q'_1 \xrightarrow{\text{dec}}_{\Delta 1} q'_0. \text{ Es gibt } q_0 \xrightarrow{\text{dec}}_{\Delta 0} q_0 \text{ und } (q_0,q'_0) \in R$$

$\Rightarrow C0$ und $C1$ sind stark äquivalente Prozesse.

3. Beh: $lts(C0)$ und $lts(C2)$ sind nicht stark äquivalent.

   Beweis durch Widerspruch:
   Annahme: $lts(C0) \sim lts(C2)$
   $\Rightarrow$ Es gibt eine starke Bisimulation $R \subseteq S0 \times S2$ mit $(q_0, q_0'') \in R$.
   Betrachte $(q_0, q_0'') \in R$.
   Annahme $\Rightarrow$ (1) gilt für (q_0, q_0'').
   $\Rightarrow$ Für $q_0 \xrightarrow{\text{dec}}_{\Delta 0} q_0$ existiert $p \in S''$ mit $q_0'' \xrightarrow{\text{dec}}_{\Delta 2} p$ und $(q_0, p) \in R$.
   Widerspruch, da es von q_0'' aus keine Transition im $lts(C2)$ mit der Aktion dec gibt.

   $\Rightarrow$ $C0$ und $C2$ sind keine stark äquivalenten Prozesse.

4. Beh: $lts(C1)$ und $lts(C2)$ sind nicht stark äquivalent.
   Beweis: Wären $lts(C1)$ und $lts(C2)$ stark äquivalent, dann wären, weil die starke Äquivalenz transitiv ist (siehe Aufgabe 3) und weil $lts(C0) \sim lts(C1)$ gilt, auch $lts(C0)$ und $lts(C2)$ stark äquivalent. Dies gilt aber nicht. Folglich sind auch die Prozesse $C1$ und $C2$ nicht stark äquivalent.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die starke Äquivalenz $\sim$ zwischen LTSen eine Äquivalenzrelation ist.

1. Reflexivität: Für alle $T \in \mathscr{T} : T \sim T$

   (a): $\surd$
   (b):

   $$\text{Definiere } R_= = \{(q,q) | q \in S\}$$
   $$(q_0, q_0) \in R_=$$

   $R_=$ ist eine starke Bisimulation: Trivial.

2. Symmetrie: Für alle $T, T' \in \mathscr{T} : T \sim T' \Rightarrow T' \sim T$

   (a): $\surd$
   (b):

   $$\begin{aligned} T \sim T' &\Rightarrow \exists \text{ starke Bisimulation in } R \subseteq S \times S' \text{ mit } (q_0, q_0') \in R \\ \text{Definiere}: \quad & R^{-1} = \{(q', q) | (q, q') \in R\} \subseteq S' \times S \\ & (q_0', q_0) \in R, \text{ da } (q_0, q_0') \in R \end{aligned}$$

   Zeige noch, dass R^{-1} die Bedingungen (1) und (2) einer starken Bisimulation erfüllt und verwende dabei, dass R die Bedingungen (1) und (2) erfüllt (d.h. eine starke Bisimulation ist).

3. Transitivität: Für alle $T, T', T'' \in \mathscr{T} : T \sim T'$ und $T' \sim T'' \Rightarrow T \sim T''$

   (a): $\surd$

   (b):

$$T \sim T' \Rightarrow \exists \text{ starke Bisimulation in } R \subseteq S \times S' \text{ mit } (q_0, q_0') \in R$$
$$T \sim T' \Rightarrow \exists \text{ starke Bisimulation in } R' \subseteq S' \times S'' \text{ mit } (q_0', q_0'') \in R$$
$$\text{Definiere:} \quad R \circ R' = \{(q, q'') | \exists q' \in S' : (q, q') \in R \text{ und } (q', q'') \in R'\} \subseteq S \times S''$$

Es gilt $(q_0, q_0'') \in R \circ R'$ weil $(q_0, q_0') \in R$ und $(q_0', q_0'') \in R'$.
Zeige noch, dass diese Relation $R \circ R'$ die Bedingungen (1) und (2) einer starken Bisimulation erfüllt und verwende dabei, dass R und R'die Bedingungen (1) und (2) erfüllen (= starke Bisimulationen sind).