Kapitel 11

Rekursion

Ziele

- Das Prinzip der rekursiven Berechnungsvorschrift verstehen. *was?*
- Rekursive Methoden in Java implementieren können. *wie?*
- Verschiedene Formen der Rekursion kennen lernen. *welche Arten?*
- Quicksort als rekursive Methode zur Sortierung eines Arrays formulieren können und verstehen. *reales Beispiel?*

Rekursive Algorithmen und Methoden

- Ein Algorithmus ist **rekursiv**, wenn in seiner (endlichen) Beschreibung derselbe Algorithmus wieder aufgerufen wird. Der Algorithmus ist dann selbstbezüglich definiert.
- Rekursive Algorithmen können in Java durch **rekursive Methoden** implementiert werden.
- Eine Methode ist rekursiv, wenn in ihrem Rumpf (Anweisungsteil) die Methode selbst wieder aufgerufen wird.

Erläuterungen zu Folie 3

Beispiel: Treppe hochgehen

- *Wenn keine Stufe mehr, dann fertig.*
- *Ansonsten (d.h. es gibt noch Stufen): steige eine Stufe hoch und steige den Rest der Treppe hoch (d.h. wende den gleichen Algorithmus auf die kürzere Treppe an)*

Allgemeines Prinzip:

- *für einen einfachen Fall weiß man das Ergebnis sofort ->„Basisfall"*
- *Ansonsten:*
  - *Idee 1:*
    Mache ein bisschen Arbeit, um das Problem zu verkleinern, und wende den Algorithmus auf das kleinere Problem an ->„Rekursion"

    (d.h. eine rekursive Vorschrift verkleinert das Problem so lange, bis der Basisfall erreicht wird und die Rekursion beendet wird bzw. terminiert)
  - *Idee 2:*
    Nimm an, dass das Ergebnis für ein kleineres Problem schon bekannt ist, und berechne daraus das Gesamtergebnis

Die Fakultätsfunktion

z.B. $3! = 3*2*1$

$\Rightarrow n! = n * \underbrace{(n-1) * \ldots * 1}_{(n-1)!}$

- Rekursive Definition der Fakultät:

```
0! = 1
n! = n * (n-1)!
```

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$

z.B. $3! = 3*2! = 3*(2*1!) = 3*(2*(1*0!)) = 3*(2*(1*1)) = \ldots = 6$

- Rekursive Methode:

```
public static int fact(int n) {
    if (n == 0) return 1;
    else return n * fact(n-1);
}
```

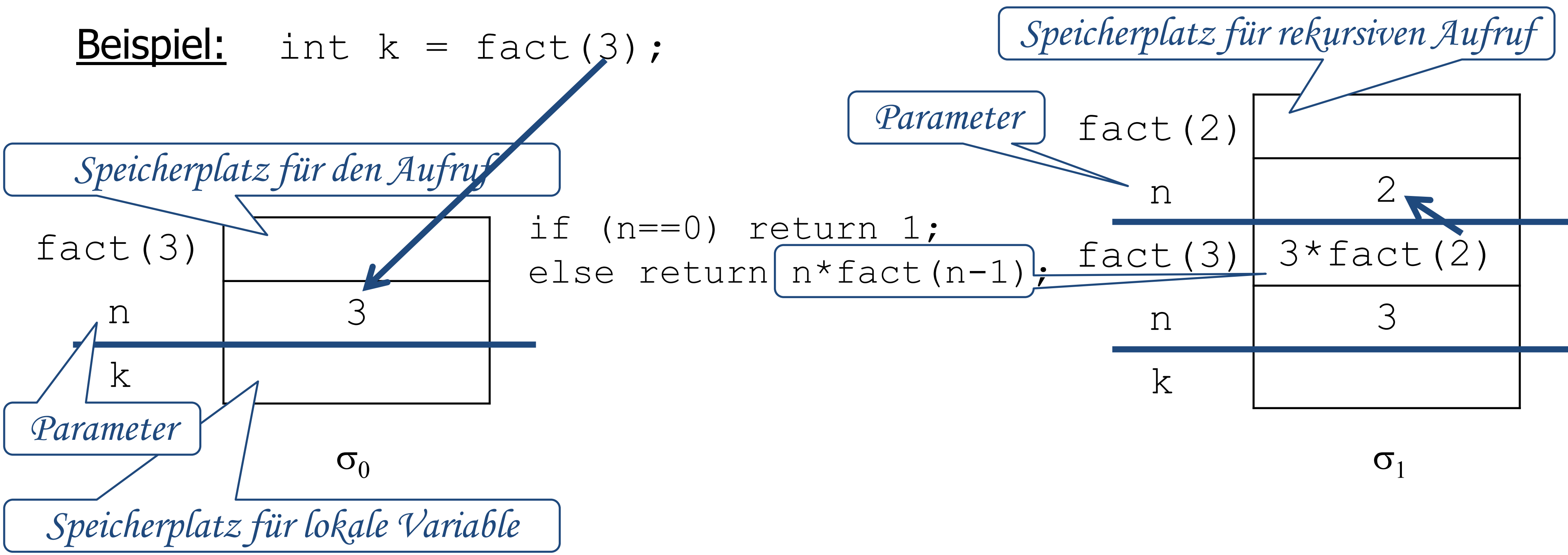
rekursiver Aufruf!

z.B. $fact(3) = 3*fact(2) = 3*(2*fact(1)) = 3*(2*(1*fact(0))) =$

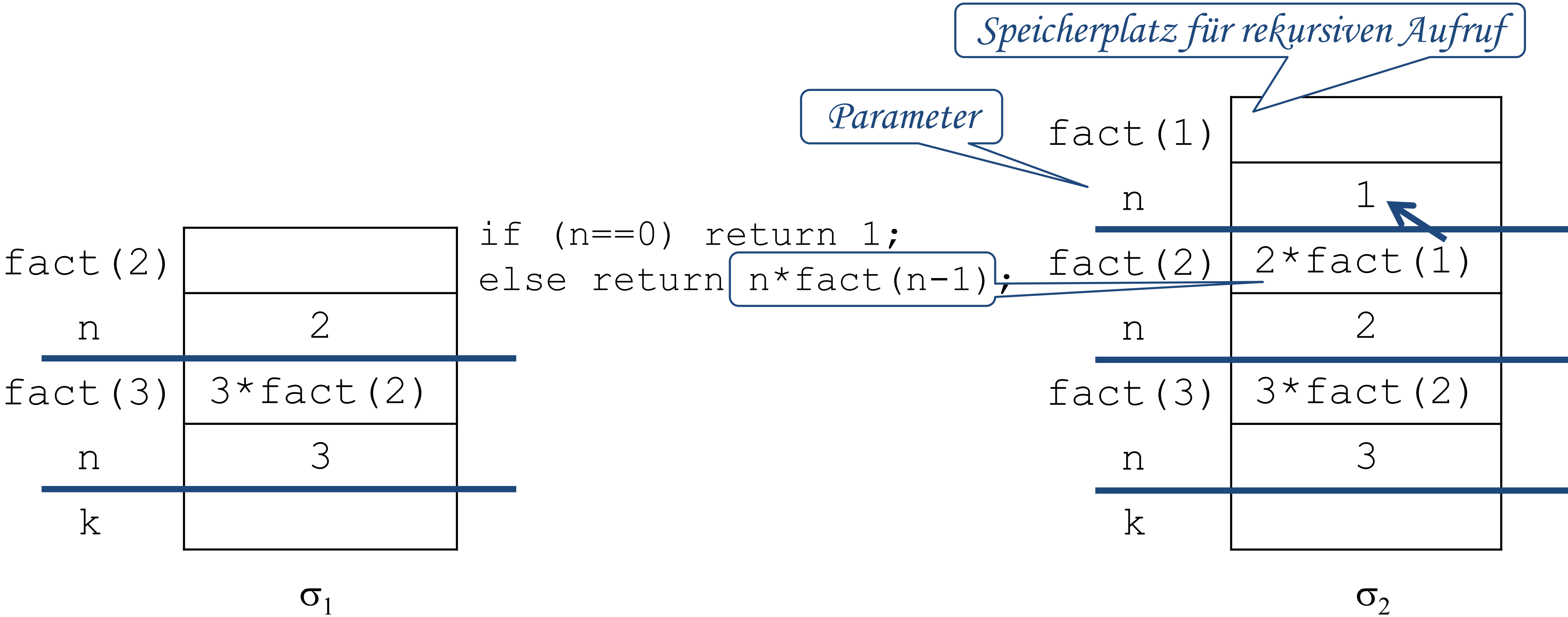
$= \underbrace{3*(2*(1*1)) = 3*(2*1) = 3*2 = 6}_{\text{schrittweise (pro rek. Aufruf) ausmultiplizieren}}$

Auswertung rekursiver Methodenaufrufe

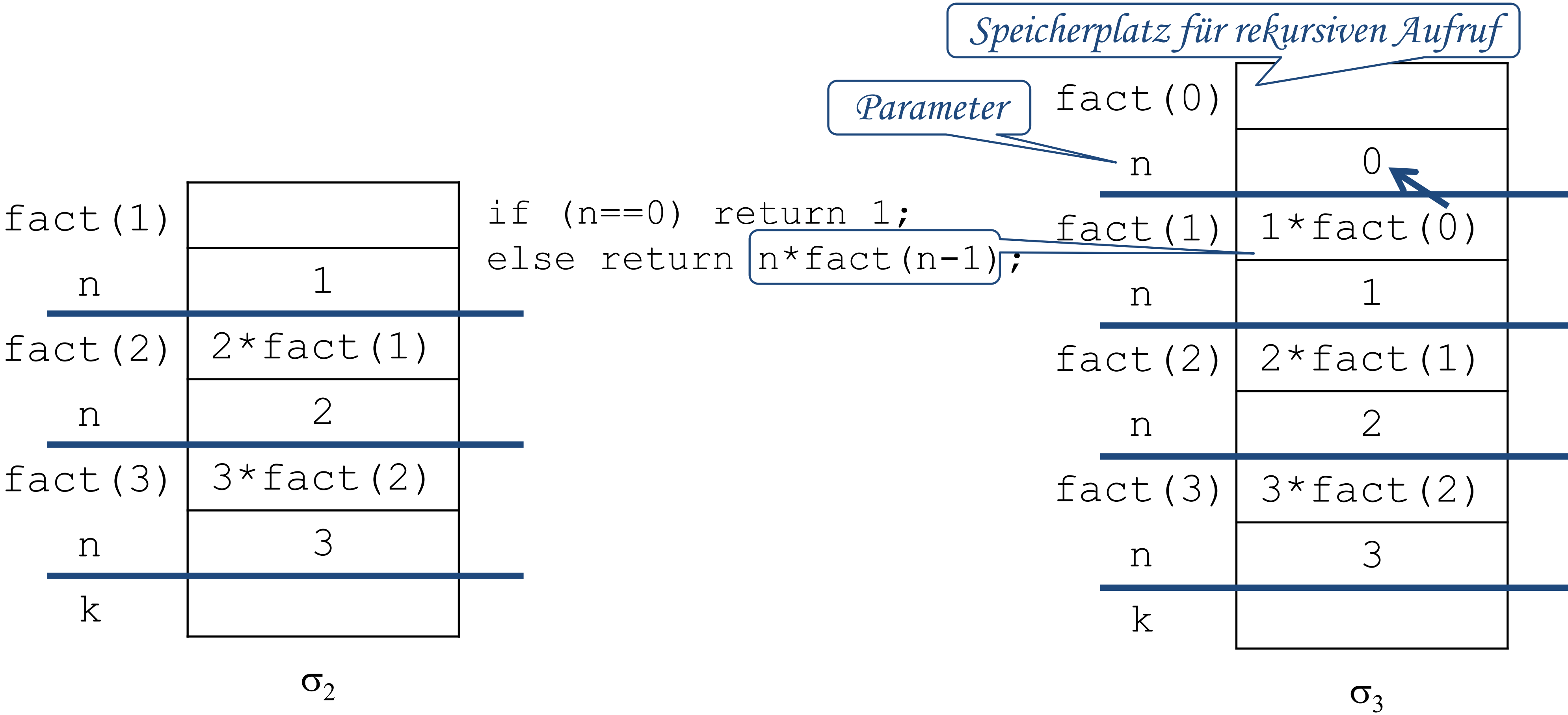
Bei der Auswertung wird ein Stack für die Zwischenergebnisse der geschachtelten Methodenaufrufe <u>aufgebaut</u>, der am Ende gemäß des Rekursionsschemas <u>rückwärts abgearbeitet</u> wird.



Aufbau des Stacks zur Berechnung von `fact(2)`



Aufbau des Stacks zur Berechnung von `fact(1)`



Berechnung von `fact(0)`

fact(0)	
n	0
fact(1)	1*fact(0)
n	1
fact(2)	2*fact(1)
n	2
fact(3)	3*fact(2)
n	3
k	

σ_3

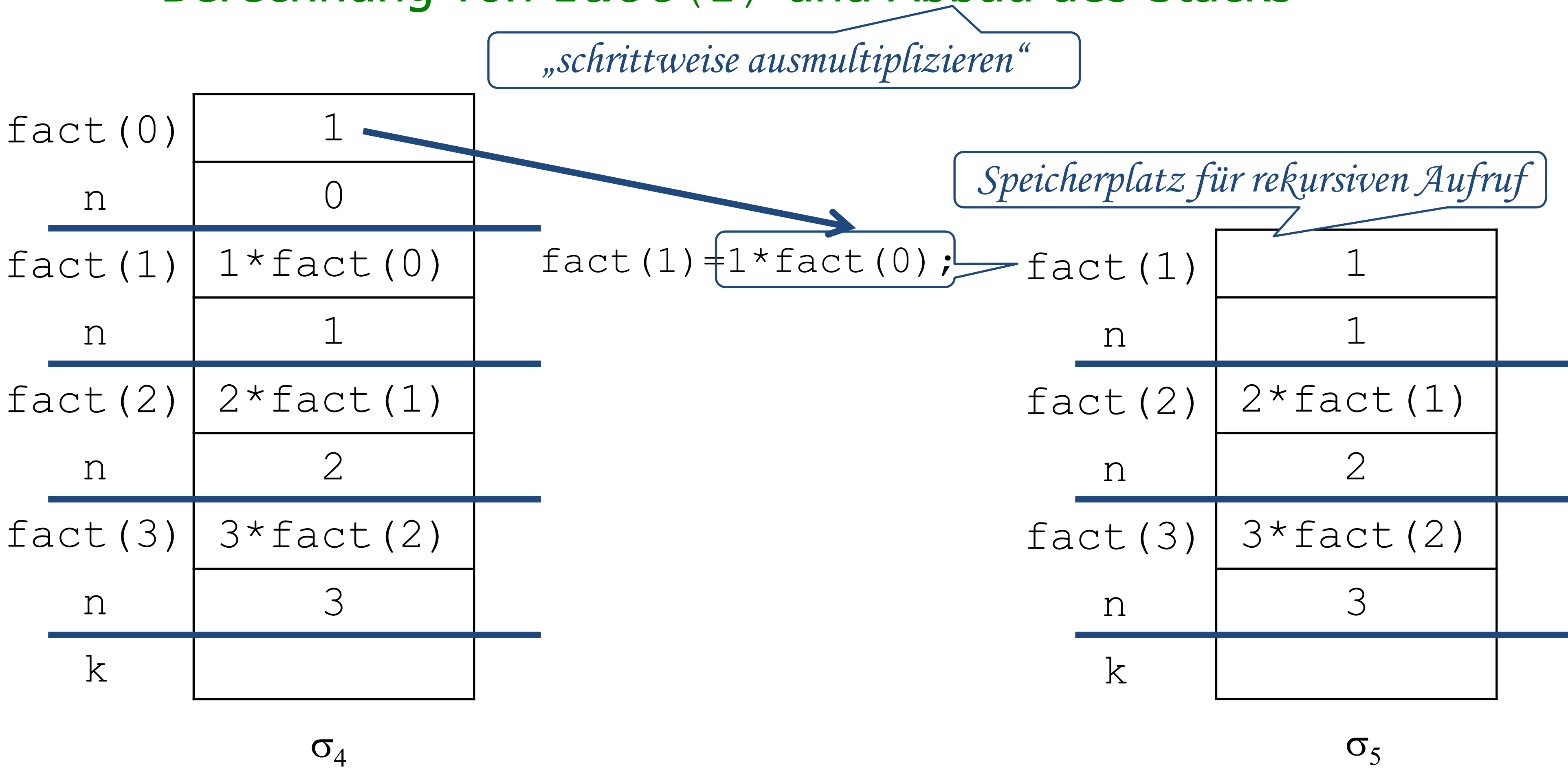
```
if (n==0) return 1;
else return n*fact(n-1);
```

Speicherplatz für Basisfall

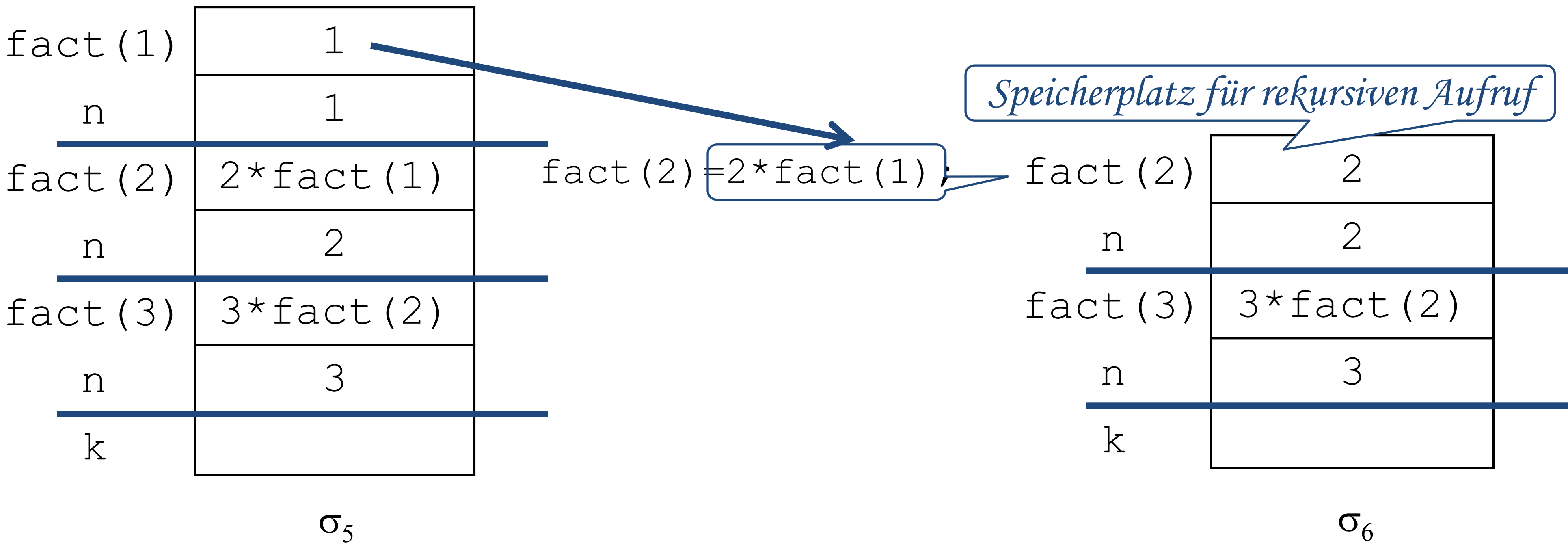
fact(0)	1
n	0
fact(1)	1*fact(0)
n	1
fact(2)	2*fact(1)
n	2
fact(3)	3*fact(2)
n	3
k	

σ_4

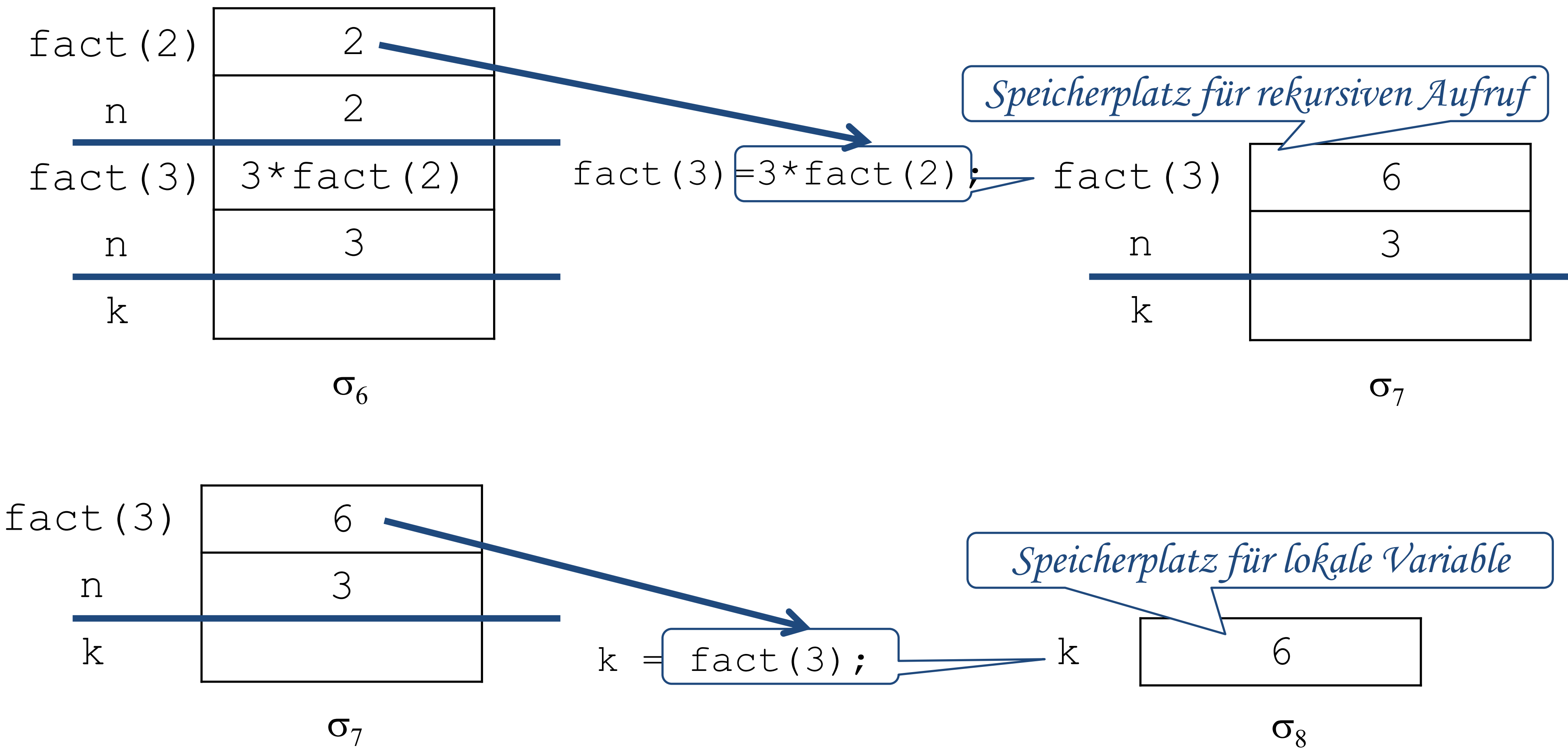
Berechnung von `fact(1)` und Abbau des Stacks



Berechnung von `fact(2)` und Abbau des Stacks



Berechnung von `fact(3)`, Abbau des Stacks und Zuweisung des Ergebnisses



Terminierung

Der Aufruf einer rekursiven Methode **terminiert**, wenn nach endlich vielen rekursiven Aufrufen ein Abbruchfall erreicht wird.

wichtig: sonst endlose Berechnung

Beispiel:

- Für alle natürlichen Zahlen `n ≥ 0` terminiert der Methodenaufruf `fact(n)`.
- Für alle negativen ganzen Zahlen `n < 0` terminiert der Methodenaufruf `fact(n)` nicht.

besser:

```
static int fact(int n) {
    if(n<0) return -1;
    else if (n==0) …
         else …
}
```

Rekursion und Iteration (1)

Zu jedem rekursiven Algorithmus gibt es einen semantisch äquivalenten iterativen Algorithmus, d.h. einen Algorithmus mit Wiederholungs-anweisungen, der dasselbe Problem löst.

Beispiel:

Whl: $0! = 1$
$n! = n*(n-1)*\ldots*1$

```
static int factIterativ(int n) {
    int result = 1;
    while (n != 0) {
        result = result * n;
        n--;
    }
    return result;
}
```

für n>= 0 gilt:
factIterativ(n) = fact(n)

z.B. factIterativ(3)

result	1	3	6	6
n	3	2	1	0

Rekursion und Iteration (2)

- Rekursive Algorithmen sind häufig eleganter und übersichtlicher als iterative Lösungen.
- Gute Compiler können aus rekursiven Programmen auch effizienten Code erzeugen; trotzdem sind iterative Programme meist schneller als rekursive.
- Für manche Problemstellungen kann es wesentlich einfacher sein einen rekursiven Algorithmus anzugeben als einen iterativen.
  (z.B. „Türme von Hanoi"; vgl. Übungen)

siehe auch ZÜ (Lotto)

Fibonacci-Zahlen: rekursive Definition und Methode

- Rekursive Definition der Fibonacci-Zahlen:

  `fib(0) = 1,  fib(1) = 1,`

  `fib(n) = fib(n-2) + fib(n-1)` für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$

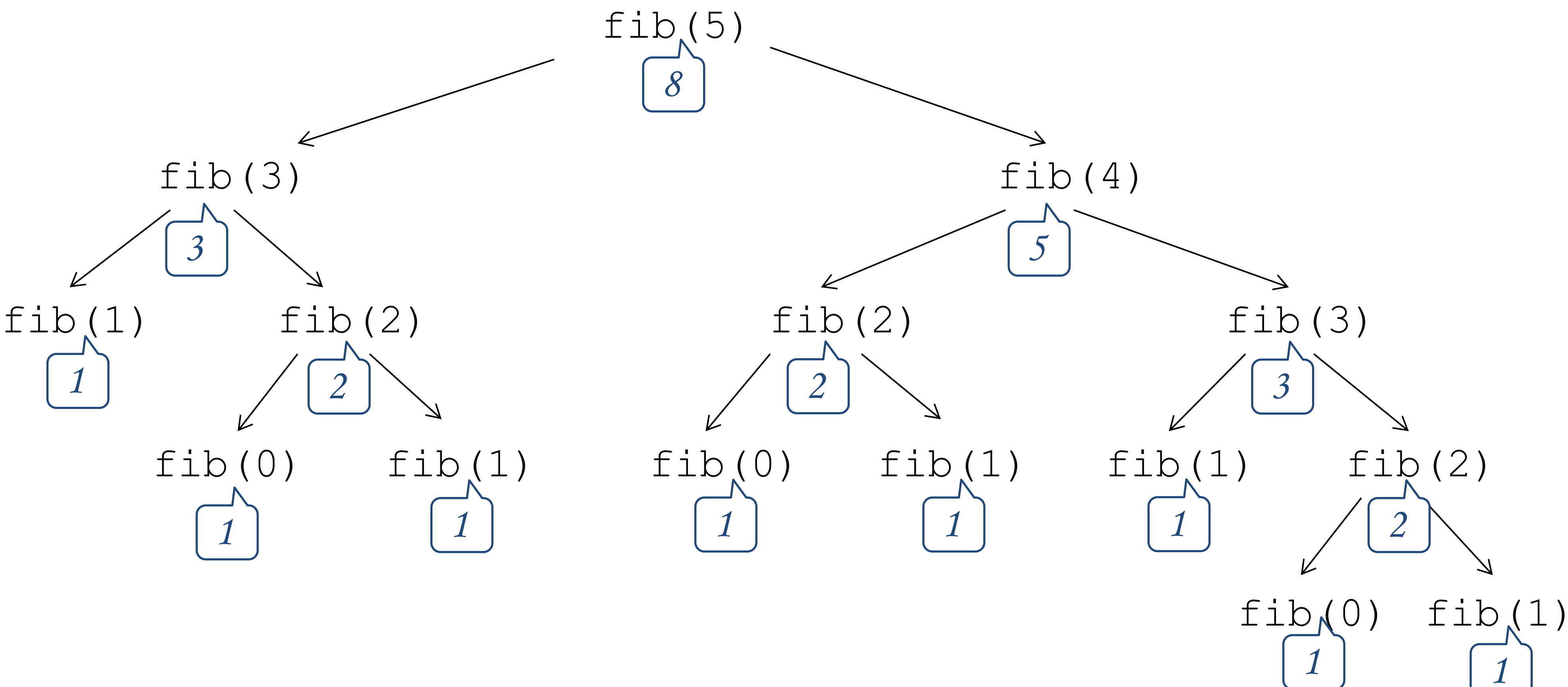
- Rekursive Methode:

```
static int fib(int n) {
    if (n <= 1) return 1;
    else return fib(n-2) + fib(n-1);
}
```

Deutung: fib(n) = Anzahl der neu geborenen Kaninchen im Jahr n.

Annahme:
- Im Jahr 0 wird ein Paar geboren. *-> fib(0) = 1*
- Im Jahr 1 hat dieses Paar ein neues Paar geboren. *-> fib(1) = 1*
- In jedem Jahr n ≥ 2 haben die ein- und zweijährigen Paare jeweils ein neues Paar geboren *-> fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)*

Kaskade rekursiver Aufrufe



Die Zeit- und die Speicherplatzkomplexitäten der rekursiven Fibonacci-Funktion sind in jedem Fall exponentiell, in O(2^n).

Warum? Wir müssen n-1 Schritte machen (siehe rechter Ast);
in jedem Schritt wird die Anzahl der rekursiven Aufrufe verdoppelt.

Fibonacci-Zahlen: Iterative Methode

```
static int fibIterativ(int n) {
    int f0 = 1;            fib(0)
    int f1 = 1;            fib(1)
    int f = 1;
    for (int i = 2; i <=  n; i++) {
        f = f0 + f1;       fib(n) = fib(n-2) + fib(n-1)
        f0 = f1;           f0 wird fib(n-1)
        f1 = f;            f1 wird fib(n)
    }
    return f;
}
```

eine for-Schleife

feste Anzahl von lokalen Variablen

Die Zeitkomplexität der iterativen Methode ist linear, d.h. in $O(n)$.

Die Speicherplatzkomplexität der iterativen Methode ist konstant, d.h. in $O(1)$.

Formen der Rekursion

- *Lineare Rekursion:*
  In jedem Zweig (der Fallunterscheidung) kommt höchstens ein rekursiver Aufruf vor, z.B. Fakultätsfunktion `fact`.

- *Kaskadenartige Rekursion:*
  Mehrere rekursive Aufrufe stehen nebeneinander und sind durch Operationen verknüpft, z.B. Fibonacci-Zahlen `fib`.

- *Verschachtelte Rekursion:*
  Rekursive Aufrufe kommen in Parametern von rekursiven Aufrufen vor, z.B. Ackermann-Funktion.

d.h. geschachtelte rekursiveAufrufe

Die Ackermann-Funktion

```
static int ack(int n, int m) {
   if (n == 0) return m + 1;
   else if (m == 0) return ack(n - 1, 1);
   else return ack(n - 1, ack(n, m - 1));
}
```

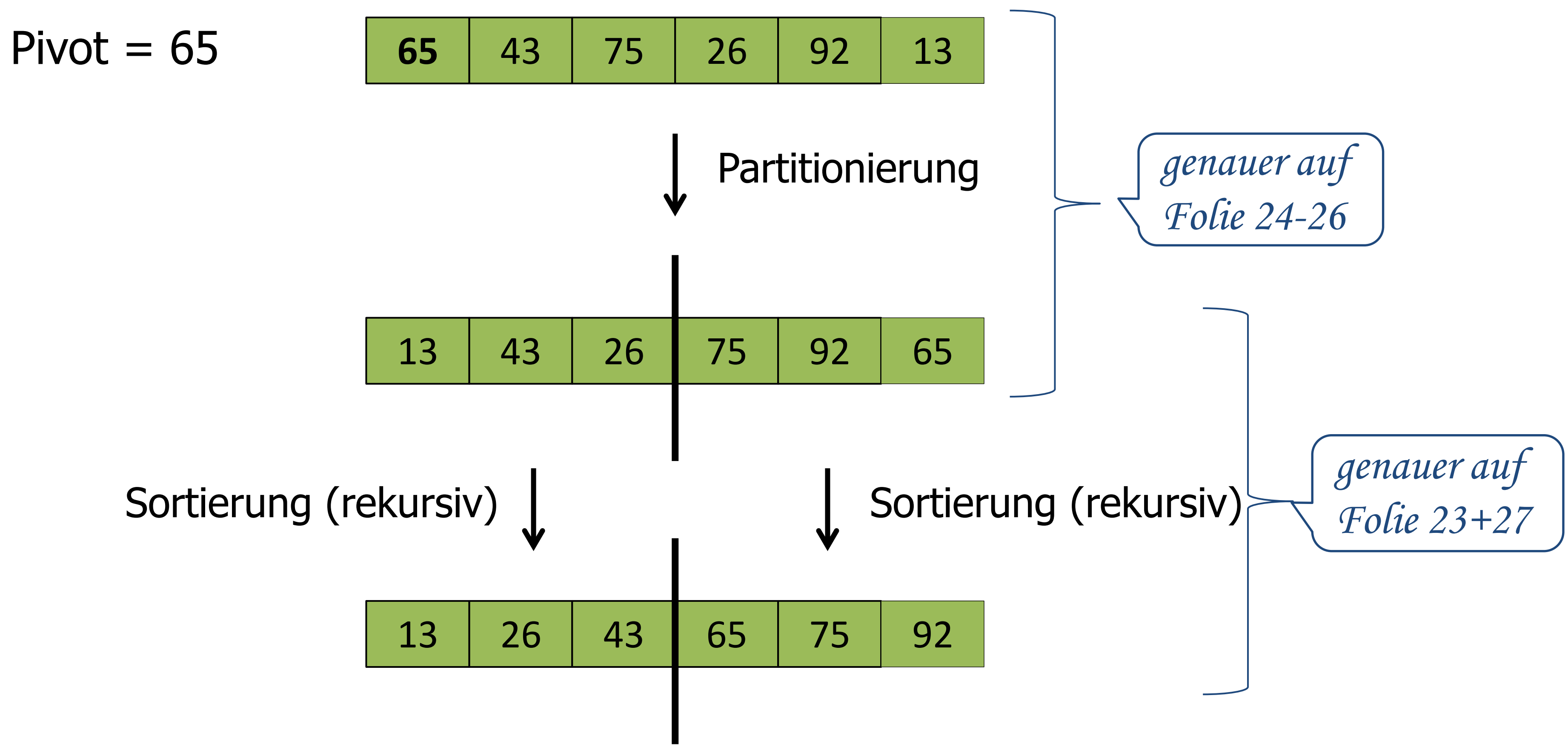
Schachtelung

- Die Ackermann-Funktion ist eine Funktion mit exponentieller Zeitkomplexität, die extrem schnell wächst.
- Sie ist das klassische Beispiel für eine berechenbare, terminierende Funktion, die nicht primitiv-rekursiv ist (erfunden 1926 von Ackermann).
- <u>Beispiele:</u>
  `ack(4,0) = 13`
  `ack(4,1) = 65533`
  `ack(4,2) =` $2^{65536}-3$ (eine Zahl mit 19729 Dezimalstellen).
  `ack(4,4) >` Anzahl der Atome im Universum

Quicksort

- Einer der schnellsten Sortieralgorithmen (von C.A.R. Hoare, 1960).
- **Idee**: Falls das zu sortierende Array mindestens zwei Elemente hat:
  1. Wähle irgendein Element aus dem Array als Pivot („Dreh- und Angelpunkt"), z.B. das erste Element.
  2. Partitioniere das Array in einen linken und einen rechten Teil, so dass
     - alle Elemente im linken Teil kleiner-gleich dem Pivot sind und
     - alle Elemente im rechten Teil größer-gleich dem Pivot sind.
  3. Wende das Verfahren rekursiv auf die beiden Teilarrays an.
- Der Quicksort-Algorithmus folgt einem ähnlichen Lösungsansatz wie die binäre Suche. Diesen Lösungsansatz nennt man „Divide-and-Conquer" („Teile und herrsche").

Quicksort: Beispiel



Quicksort in Java

```
static void quicksort(double[] a) {
   qsort(a, 0, a.length - 1);
}
  // Sortiert den Teilbereich a[from]...a[to] von a.
static void qsort(double[] a, int from, int to) {
   if (from < to) {  //mehr als ein Element zu sortieren
      double pivot = a[from]; //waehle erstes Element als Pivot
        //Partitionierung und Rückgabe des Grenzindex
      int gIdx = partition(a, from, to, pivot);
        //rekursiver Aufruf für den linken Teilarray
      qsort(a, from, gIdx);
        //rekursiver Aufruf für den rechten Teilarray
       qsort(a, gIdx + 1, to);
   }
}
```

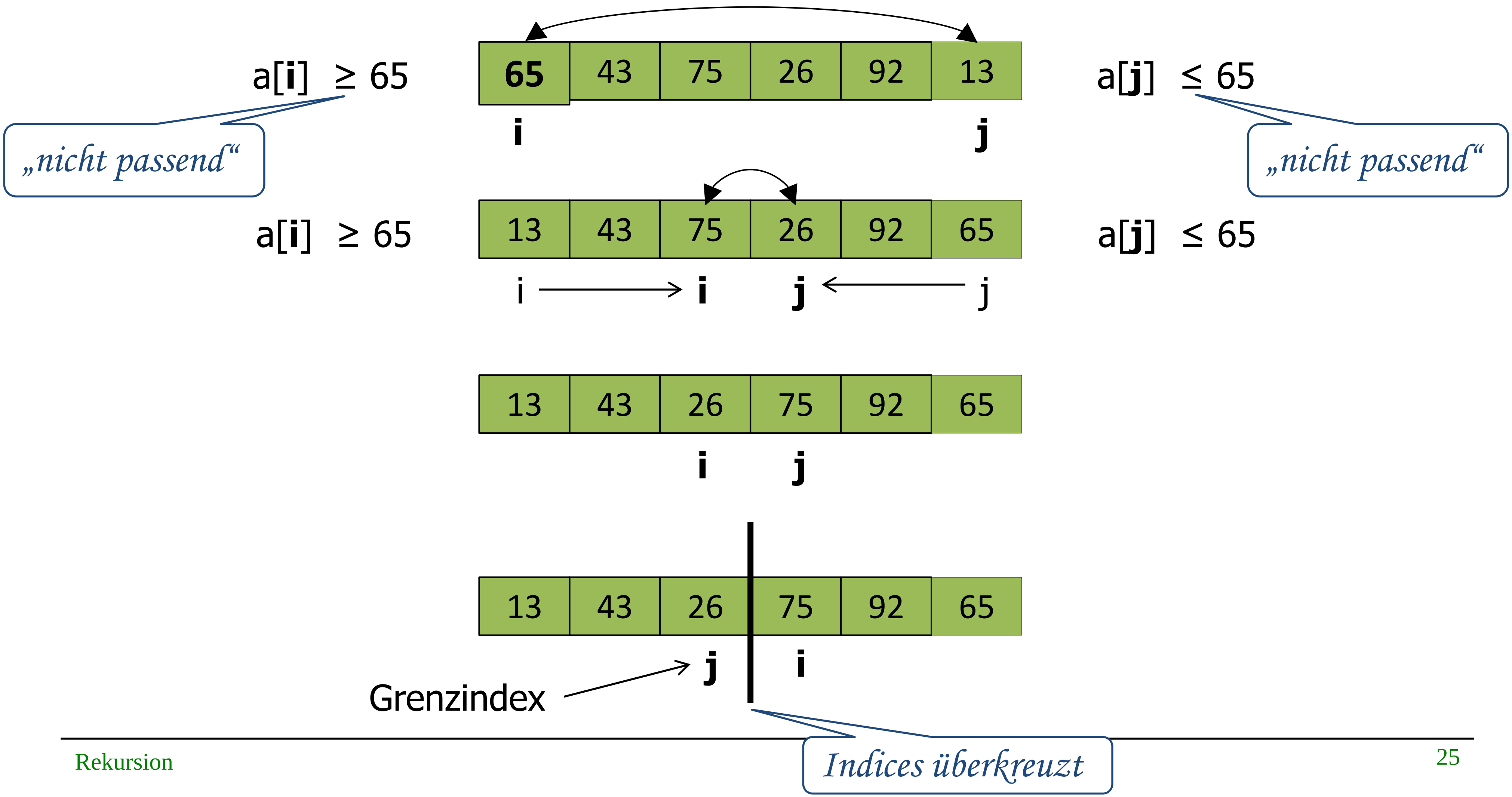
genauer auf Folie 24-26

Partitionierung: Vorgehensweise

- Laufe von der unteren und der oberen Arraygrenze mit Indizes `i` und `j` nach innen und vertausche „nicht passende" Elemente `a[i]` und `a[j]` bis sich die Indizes treffen oder überkreuzt haben.
- Der zuletzt erreichte Index `j` wird als Grenzindex der Partitionierung zurückgegeben.
- Von unten kommend sind Elemente nicht passend, wenn sie größer-gleich dem Pivot sind.
- Von oben kommend sind Elemente nicht passend, wenn sie kleiner-gleich dem Pivot sind.
- ***Bemerkung:***
  Gegebenenfalls werden auch gleiche Elemente vertauscht. Dies ist aus technischen Gründen nötig, damit der Index `j` so stoppt, dass der letzte Wert von `j` immer der richtige Grenzindex ist.

Partitionierung: Beispiel

Pivot = 65



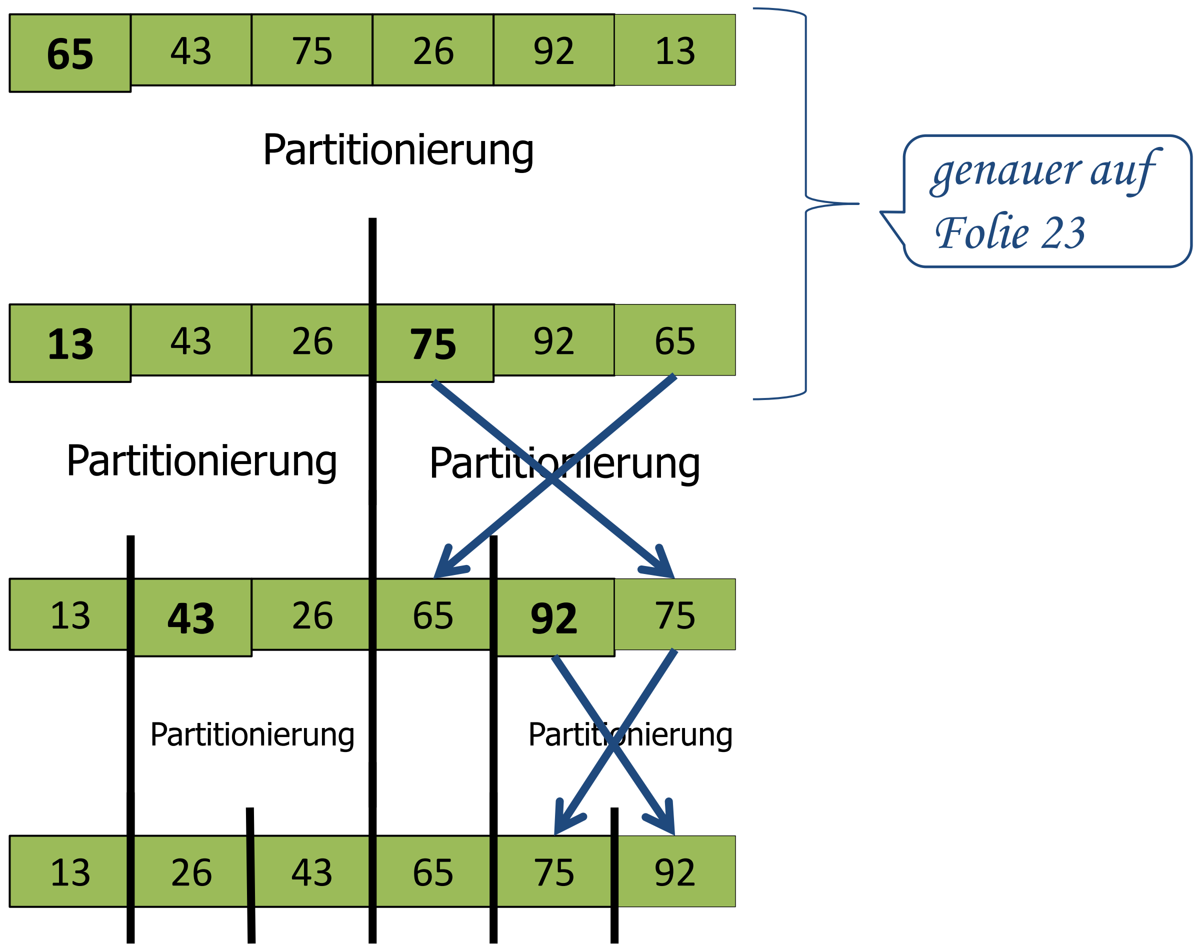
Partitionierung in Java

```
static int partition(double[] a, int from, int to, double pivot) {
   int i = from - 1;
   int j = to + 1;
   while (i < j) {
      i++; //naechste Startposition von links
        //von links nach innen laufen solange Elemente kleiner als Pivot
      while  (a[i] < pivot) i++;
      j--; //naechste Startposition von rechts
        //von rechts nach innen laufen solange Elemente größer als Pivot
      while  (pivot < a[j]) j--;
      if (i < j) { //vertausche a[i] und a[j]
         double temp = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = temp;
      }
   } //Ende while
   return j; //Rückgabe des Grenzindex
}
```

solange noch nicht überkreuzt

falls nicht überkreuzt

Partitionierungshierarchie des Quicksort



Zeitkomplexität von Quicksort (1)

- <u>Beispiel:</u> Das Array von oben hat die Länge 6.
  - Die Hierarchie der Partitionierungen stellt einen Baum dar mit 3 Etagen, wobei $3 = \log_2(6) + 1$.

    jedes Mal in etwa halbiert
  - Alle Partitionierungen einer Etage benötigen zusammen maximal c * 6 Schritte (mit einer Konstanten c).

    jedes Element im Array anschauen
  - Folglich ist die Zeitkomplexität in diesem Fall durch $6 * \log_2(6)$ beschränkt.

abhängig vom gewählten Pivot

- <u>Allgemein:</u>
  - Wenn ein Array der Länge n immer wieder in <u>zwei etwa gleich große</u> Teile aufgeteilt wird, dann ist die Anzahl der Partitionierungs-Etagen durch $\log_2(n)$ beschränkt.
  - Die Anzahl der Schritte pro Etage ist durch n beschränkt und damit die gesamte Zeitkomplexität in diesem Fall durch $n * \log_2(n)$.
  - Man kann zeigen, dass die Zeitkomplexität des Quicksort **im durchschnittlichen Fall** von der Ordnung $n * \log_2(n)$ ist.

Zeitkomplexität des Quicksort (2)

d.h. Array wird nicht halbiert

Im **schlechtesten Fall** ist die Zeitkomplexität des Quicksort quadratisch, d.h. von der Ordnung n^2. Dieser Fall tritt z.B. ein, wenn das Array schon sortiert ist.

n Etagen und
n Schritte pro Etage