

# Kapitel 11

---

# Rekursion

## Ziele

- Das Prinzip der rekursiven Berechnungsvorschrift verstehen.
- Rekursive Methoden in Java implementieren können.
- Verschiedene Formen der Rekursion kennen lernen.
- Quicksort als rekursive Methode zur Sortierung eines Arrays formulieren können und verstehen.

## Rekursive Algorithmen und Methoden

- Ein Algorithmus ist **rekursiv**, wenn in seiner (endlichen) Beschreibung derselbe Algorithmus wieder aufgerufen wird. Der Algorithmus ist dann selbstbezüglich definiert.
- Rekursive Algorithmen können in Java durch **rekursive Methoden** implementiert werden.
- Eine Methode ist rekursiv, wenn in ihrem Rumpf (Anweisungsteil) die Methode selbst wieder aufgerufen wird.

## Die Fakultätsfunktion

- Rekursive Definition der Fakultät:

$$0! = 1$$

$$n! = n * (n-1)! \quad \text{für alle natürlichen Zahlen } n \geq 1$$

- Rekursive Methode:

```
public static int fact(int n) {  
    if (n == 0) return 1;  
    else return n * fact(n-1);  
}
```



rekursiver Aufruf!

## Auswertung rekursiver Methodenaufrufe

Bei der Auswertung wird ein Stack für die Zwischenergebnisse der geschachtelten Methodenaufrufe aufgebaut, der am Ende gemäß des Rekursionsschemas rückwärts abgearbeitet wird.

Beispiel: `int k = fact(3);`

fact(3)	
n	3
k	

$\sigma_0$

```
if (n==0) return 1;
else return n*fact(n-1);
```

fact(2)	
n	2
fact(3)	3*fact(2)
n	3
k	

$\sigma_1$

## Aufbau des Stacks zur Berechnung von `fact(2)`

<code>fact(2)</code>	
<code>n</code>	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
<code>n</code>	3
<code>k</code>	

$\sigma_1$

```
if (n==0) return 1;  
else return n*fact(n-1);
```

<code>fact(1)</code>	
<code>n</code>	1
<code>fact(2)</code>	<code>2*fact(1)</code>
<code>n</code>	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
<code>n</code>	3
<code>k</code>	

$\sigma_2$

## Aufbau des Stacks zur Berechnung von `fact(1)`

fact(1)	
n	1
fact(2)	2*fact(1)
n	2
fact(3)	3*fact(2)
n	3
k	

$\sigma_2$

```
if (n==0) return 1;
else return n*fact(n-1);
```

fact(0)	
n	0
fact(1)	1*fact(0)
n	1
fact(2)	2*fact(1)
n	2
fact(3)	3*fact(2)
n	3
k	

$\sigma_3$

## Berechnung von `fact(0)`

<code>fact(0)</code>	
<code>n</code>	0
<code>fact(1)</code>	<code>1*fact(0)</code>
<code>n</code>	1
<code>fact(2)</code>	<code>2*fact(1)</code>
<code>n</code>	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
<code>n</code>	3
<code>k</code>	

$\sigma_3$

```
if (n==0) return 1;
else return n*fact(n-1);
```

<code>fact(0)</code>	1
<code>n</code>	0
<code>fact(1)</code>	<code>1*fact(0)</code>
<code>n</code>	1
<code>fact(2)</code>	<code>2*fact(1)</code>
<code>n</code>	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
<code>n</code>	3
<code>k</code>	

$\sigma_4$



## Berechnung von `fact(1)` und Abbau des Stacks

<code>fact(0)</code>	1
n	0
<code>fact(1)</code>	<code>1*fact(0)</code>
n	1
<code>fact(2)</code>	<code>2*fact(1)</code>
n	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
n	3
k	

$\sigma_4$

`fact(1) = 1*fact(0);`

<code>fact(1)</code>	1
n	1
<code>fact(2)</code>	<code>2*fact(1)</code>
n	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
n	3
k	

$\sigma_5$

## Berechnung von `fact(2)` und Abbau des Stacks

<code>fact(1)</code>	1
n	1
<code>fact(2)</code>	<code>2*fact(1)</code>
n	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
n	3
k	

$\sigma_5$

`fact(2) = 2 * fact(1);`

<code>fact(2)</code>	2
n	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
n	3
k	

$\sigma_6$

## Berechnung von `fact(3)`, Abbau des Stacks und Zuweisung des Ergebnisses

<code>fact(2)</code>	2
<code>n</code>	2
<code>fact(3)</code>	<code>3*fact(2)</code>
<code>n</code>	3
<code>k</code>	

$\sigma_6$

`fact(3) = 3*fact(2);`

<code>fact(3)</code>	6
<code>n</code>	3
<code>k</code>	

$\sigma_7$

<code>fact(3)</code>	6
<code>n</code>	3
<code>k</code>	

$\sigma_7$

`k = fact(3);`

<code>k</code>	6
----------------	---

$\sigma_8$

## Terminierung

Der Aufruf einer rekursiven Methode **terminiert**, wenn nach endlich vielen rekursiven Aufrufen ein Abbruchfall erreicht wird.

### Beispiel:

- Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 0$  terminiert der Methodenaufruf `fact(n)`.
- Für alle negativen ganzen Zahlen  $n < 0$  terminiert der Methodenaufruf `fact(n)` nicht.

## Rekursion und Iteration (1)

Zu jedem rekursiven Algorithmus gibt es einen semantisch äquivalenten iterativen Algorithmus, d.h. einen Algorithmus mit Wiederholungsanweisungen, der dasselbe Problem löst.

### Beispiel:

```
static int factIterativ(int n) {  
    int result = 1;  
    while (n != 0) {  
        result = result * n;  
        n--;  
    }  
    return result;  
}
```

## Rekursion und Iteration (2)

- Rekursive Algorithmen sind häufig eleganter und übersichtlicher als iterative Lösungen.
- Gute Compiler können aus rekursiven Programmen auch effizienten Code erzeugen; trotzdem sind iterative Programme meist schneller als rekursive.
- Für manche Problemstellungen kann es wesentlich einfacher sein einen rekursiven Algorithmus anzugeben als einen iterativen.  
(z.B. „Türme von Hanoi“; vgl. Übungen)

## Fibonacci-Zahlen: rekursive Definition und Methode

### ■ Rekursive Definition der Fibonacci-Zahlen:

$$\text{fib}(0) = 1, \quad \text{fib}(1) = 1,$$

$$\text{fib}(n) = \text{fib}(n-2) + \text{fib}(n-1) \quad \text{für alle natürlichen Zahlen } n \geq 2$$

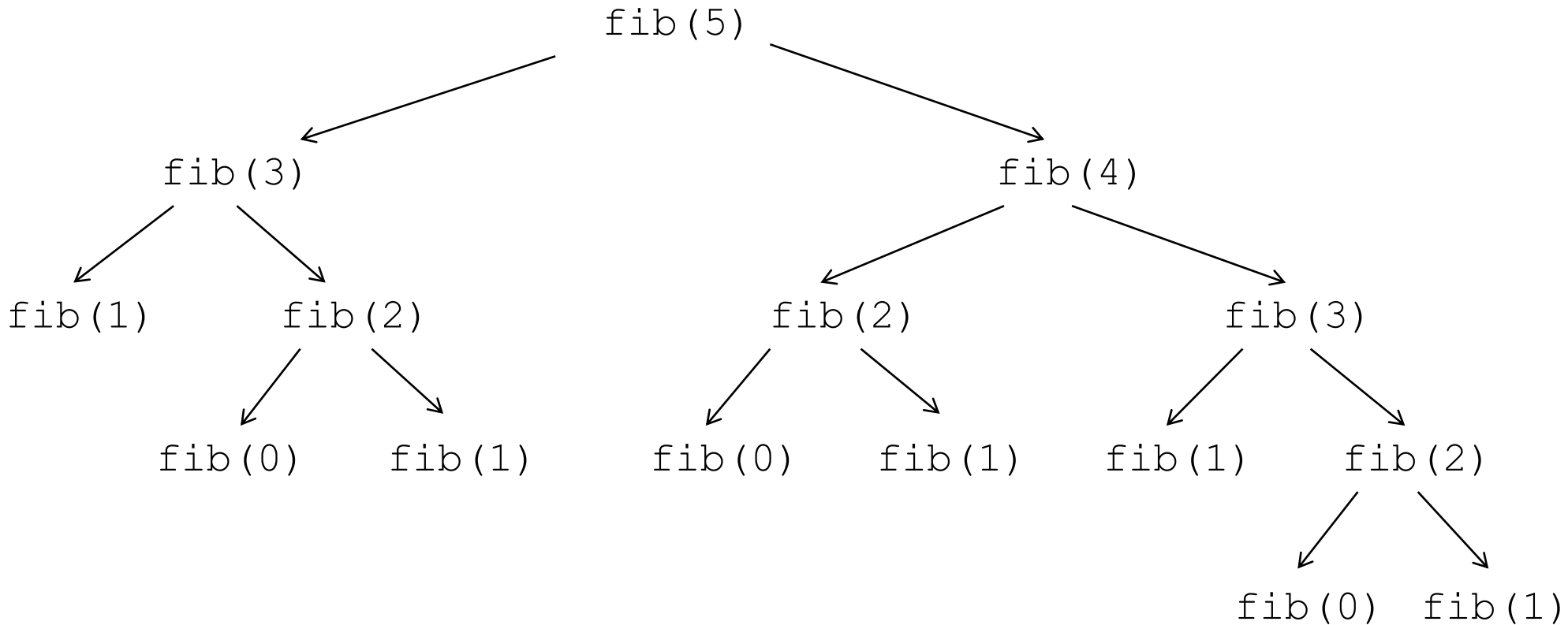
### ■ Rekursive Methode:

```
static int fib(int n) {  
    if (n <= 1) return 1;  
    else return fib(n-2) + fib(n-1);  
}
```

Deutung:  $\text{fib}(n)$  = Anzahl der neu geborenen Kaninchen im Jahr  $n$ .

- Annahme:
- Im Jahr 0 wird ein Paar geboren.
  - Im Jahr 1 hat dieses Paar ein neues Paar geboren.
  - In jedem Jahr  $n \geq 2$  haben die ein- und zweijährigen Paare jeweils ein neues Paar geboren

## Kaskade rekursiver Aufrufe



Die Zeit- und die Speicherplatzkomplexitäten der rekursiven Fibonacci-Funktion sind in jedem Fall exponentiell, in  $O(2^n)$ .



## Fibonacci-Zahlen: Iterative Methode

```
static int fibIterativ(int n) {
    int f0 = 1;
    int f1 = 1;
    int f = 1;
    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        f = f0 + f1;
        f0 = f1;
        f1 = f;
    }
    return f;
}
```

Die Zeitkomplexität der iterativen Methode ist linear, d.h. in  $O(n)$ .

Die Speicherplatzkomplexität der iterativen Methode ist konstant, d.h. in  $O(1)$ .

## Formen der Rekursion

- *Lineare Rekursion:*  
In jedem Zweig (der Fallunterscheidung) kommt höchstens ein rekursiver Aufruf vor, z.B. Fakultätsfunktion `fact`.
- *Kaskadenartige Rekursion:*  
Mehrere rekursive Aufrufe stehen nebeneinander und sind durch Operationen verknüpft, z.B. Fibonacci-Zahlen `fib`.
- *Verschachtelte Rekursion:*  
Rekursive Aufrufe kommen in Parametern von rekursiven Aufrufen vor, z.B. Ackermann-Funktion.

## Die Ackermann-Funktion

```
static int ack(int n, int m) {  
    if (n == 0) return m + 1;  
    else if (m == 0) return ack(n - 1, 1);  
    else return ack(n - 1, ack(n, m - 1));  
}
```

- Die Ackermann-Funktion ist eine Funktion mit exponentieller Zeitkomplexität, die extrem schnell wächst.
- Sie ist das klassische Beispiel für eine berechenbare, terminierende Funktion, die nicht primitiv-rekursiv ist (erfunden 1926 von Ackermann).

- Beispiele:

$$\text{ack}(4, 0) = 13$$

$$\text{ack}(4, 1) = 65533$$

$$\text{ack}(4, 2) = 2^{65536} - 3 \text{ (eine Zahl mit 19729 Dezimalstellen).}$$

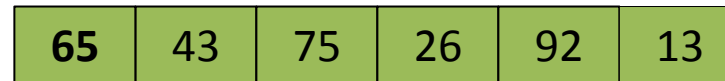
$$\text{ack}(4, 4) > \text{Anzahl der Atome im Universum}$$

## Quicksort

- Einer der schnellsten Sortieralgorithmen (von C.A.R. Hoare, 1960).
- **Idee:** Falls das zu sortierende Array mindestens zwei Elemente hat:
  1. Wähle irgendein Element aus dem Array als Pivot („Dreh- und Angelpunkt“), z.B. das erste Element.
  2. Partitioniere das Array in einen linken und einen rechten Teil, so dass
    - alle Elemente im linken Teil kleiner-gleich dem Pivot sind und
    - alle Elemente im rechten Teil größer-gleich dem Pivot sind.
  3. Wende das Verfahren rekursiv auf die beiden Teilarrays an.
- Der Quicksort-Algorithmus folgt einem ähnlichen Lösungsansatz wie die binäre Suche. Diesen Lösungsansatz nennt man „Divide-and-Conquer“ („Teile und herrsche“).

## Quicksort: Beispiel

Pivot = 65



↓ Partitionierung



Sortierung (rekursiv) ↓

↓ Sortierung (rekursiv)



## Quicksort in Java

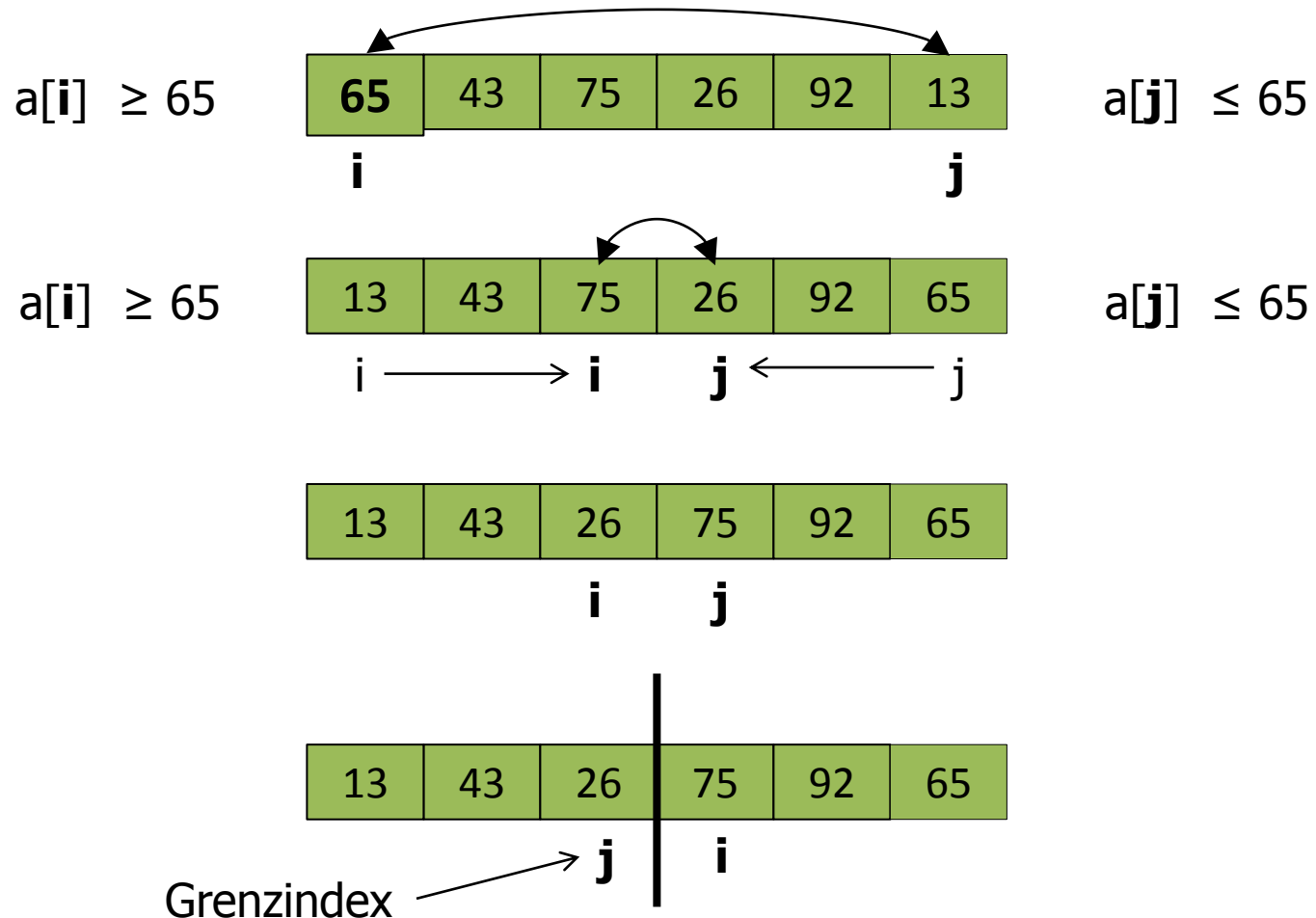
```
static void quicksort(double[] a) {  
    qsort(a, 0, a.length - 1);  
}  
  
    // Sortiert den Teilbereich a[from]...a[to] von a.  
static void qsort(double[] a, int from, int to) {  
    if (from < to) { //mehr als ein Element zu sortieren  
        double pivot = a[from]; //wähle erstes Element als Pivot  
        //Partitionierung und Rückgabe des Grenzindex  
        int gIdx = partition(a, from, to, pivot);  
        //rekursiver Aufruf für den linken Teilarray  
        qsort(a, from, gIdx);  
        //rekursiver Aufruf für den rechten Teilarray  
        qsort(a, gIdx + 1, to);  
    }  
}
```

## Partitionierung: Vorgehensweise

- Laufe von der unteren und der oberen Arraygrenze mit Indizes  $i$  und  $j$  nach innen und vertausche „nicht passende“ Elemente  $a[i]$  und  $a[j]$  bis sich die Indizes treffen oder überkreuzt haben.
- Der zuletzt erreichte Index  $j$  wird als Grenzindex der Partitionierung zurückgegeben.
- Von unten kommend sind Elemente nicht passend, wenn sie größer-gleich dem Pivot sind.
- Von oben kommend sind Elemente nicht passend, wenn sie kleiner-gleich dem Pivot sind.
- Bemerkung:  
Gegebenenfalls werden auch gleiche Elemente vertauscht. Dies ist aus technischen Gründen nötig, damit der Index  $j$  so stoppt, dass der letzte Wert von  $j$  immer der richtige Grenzindex ist.

## Partitionierung: Beispiel

Pivot = 65

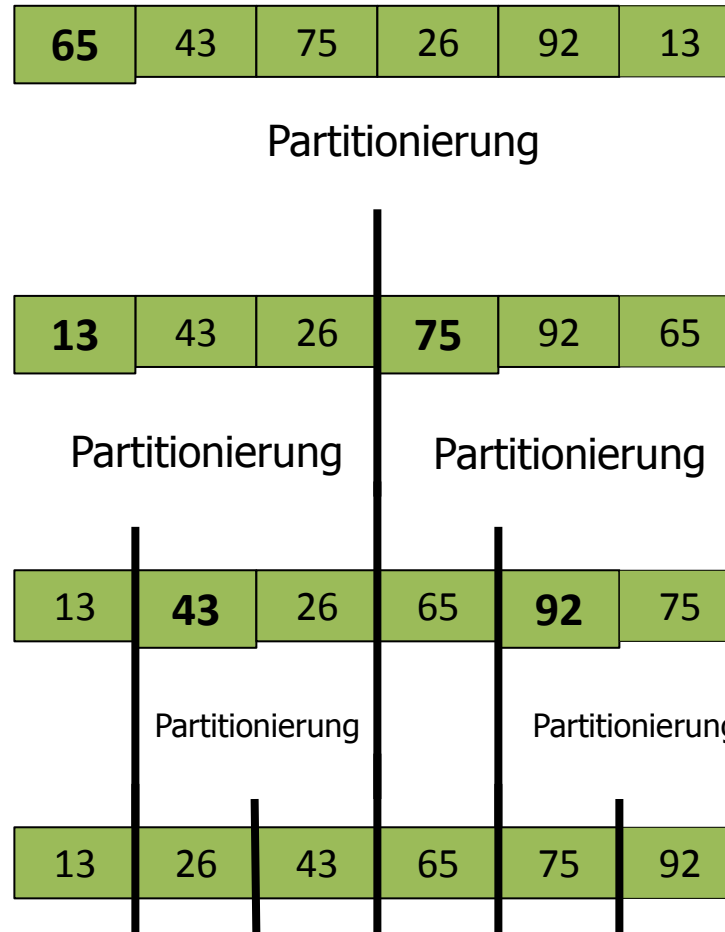




## Partitionierung in Java

```
static int partition(double[] a, int from, int to, double pivot) {
    int i = from - 1;
    int j = to + 1;
    while (i < j) {
        i++; //naechste Startposition von links
        //von links nach innen laufen solange Elemente kleiner als Pivot
        while (a[i] < pivot) i++;
        j--; //naechste Startposition von rechts
        //von rechts nach innen laufen solange Elemente größer als Pivot
        while (pivot < a[j]) j--;
        if (i < j) { //vertausche a[i] und a[j]
            double temp = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = temp;
        }
    } //Ende while
    return j; //Rückgabe des Grenzindex
}
```

## Partitionierungshierarchie des Quicksort



## Zeitkomplexität von Quicksort (1)

- Beispiel: Das Array von oben hat die Länge 6.
  - Die Hierarchie der Partitionierungen stellt einen Baum dar mit 3 Etagen, wobei  $3 = \log_2(6) + 1$ .
  - Alle Partitionierungen einer Etage benötigen zusammen maximal  $c * 6$  Schritte (mit einer Konstanten  $c$ ).
  - Folglich ist die Zeitkomplexität in diesem Fall durch  $6 * \log_2(6)$  beschränkt.
- Allgemein:
  - Wenn ein Array der Länge  $n$  immer wieder in zwei etwa gleich große Teile aufgeteilt wird, dann ist die Anzahl der Partitionierungs-Etagen durch  $\log_2(n)$  beschränkt.
  - Die Anzahl der Schritte pro Etage ist durch  $n$  beschränkt und damit die gesamte Zeitkomplexität in diesem Fall durch  $n * \log_2(n)$ .
  - Man kann zeigen, dass die Zeitkomplexität des Quicksort **im durchschnittlichen Fall** von der Ordnung  $n * \log_2(n)$  ist.

## Zeitkomplexität des Quicksort (2)

Im **schlechtesten Fall** ist die Zeitkomplexität des Quicksort quadratisch, d.h. von der Ordnung  $n^2$ . Dieser Fall tritt z.B. ein, wenn das Array schon sortiert ist.

