

Übungen zu Informatik 4

Aufgabe 1-1 **Eigenschaften von Wörtern** (Präsenzaufgabe)

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass für beliebige $v, w \in \Sigma^*$ gilt: $(vw)^R = w^R v^R$.

Aufgabe 1-2 **Eigenschaften von Sprachen** (Präsenzaufgabe)

Gegeben sei ein Alphabet Σ . Zeigen Sie, dass für alle Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ gilt:

- a) $L^* = (L^*)^*$.
- b) $(L_1 \cup L_2)^R = L_1^R \cup L_2^R$.

Aufgabe 1-3 **Plottersteuerung** (Präsenzaufgabe)

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow, \downarrow\}$. Jedes Element von Σ^* kann als Eingabe für einen Plotter interpretiert werden: Jedem Pfeil entspricht eine Bewegung des Druckkopfes um 1mm in die Richtung, in die der Pfeil zeigt.

- a) Definieren Sie die Sprache $G \subseteq \Sigma^*$, die alle geschlossenen Figuren, die der Plotter zeichnen kann, beschreibt. Dabei bezeichnen wir jede Figur, bei der die Anfangs- und Endposition des Druckkopfes übereinstimmen als geschlossene Figur.
- b) Definieren Sie eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, die die Größe jeder Figur „verdoppelt“.
- c) Das Nachfolgermodell des Plotters kann auch diagonale Linien zeichnen. Dazu wird das Eingabealphabet erweitert: $\Sigma_n = \{\leftarrow, \swarrow, \uparrow, \nearrow, \rightarrow, \searrow, \downarrow, \swarrow, \nwarrow\}$. Um bereits bestehende Zeichnungen zu optimieren, wird eine Funktion $d : \Sigma_n^* \rightarrow \Sigma_n^*$ (für alle $x, y \in \Sigma_n, w \in \Sigma_n^*$) folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
 d(\epsilon) &= \epsilon \\
 d(x) &= x \\
 d(x \circ y \circ w) &= \begin{cases} \swarrow \circ d(w) & \text{falls } x = \uparrow, y = \leftarrow \text{ oder } x = \leftarrow, y = \uparrow \\ \nearrow \circ d(w) & \text{falls } x = \uparrow, y = \rightarrow \text{ oder } x = \rightarrow, y = \uparrow \\ \swarrow \circ d(w) & \text{falls } x = \downarrow, y = \leftarrow \text{ oder } x = \leftarrow, y = \downarrow \\ \searrow \circ d(w) & \text{falls } x = \downarrow, y = \rightarrow \text{ oder } x = \rightarrow, y = \downarrow \\ x \circ d(y \circ w) & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie $d(\leftarrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow \downarrow \uparrow \leftarrow)$.
2. Beweisen Sie, dass für alle $w \in \Sigma_n^*$ gilt: $|d(w)| \leq |w|$.
3. Beweisen Sie, dass für alle $w \in \Sigma_n^*$ gilt: $d(w)$ enthält kein Teilwort der Form $\leftarrow \uparrow$.

Aufgabe 1-4 **Eigenschaften von Sprachen** (4 Punkte)

Gegeben sei ein Alphabet Σ . Zeigen Sie:

- a) $(L_1 L_2)^R = L_2^R L_1^R$.
- b) $(L^*)^R = (L^R)^*$.

Aufgabe 1-5 **Entfernen von Duplikaten** (8 Punkte)

Gegeben sei ein Alphabet Σ . Die Funktionen $f_a : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ sowie die Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ seien (für alle $a \in \Sigma$) rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 f_a(\epsilon) &= a & f(\epsilon) &= \epsilon \\
 f_a(xw) &= \begin{cases} f_a(w) & x = a \\ a f_x(w) & x \neq a \end{cases} & f(aw) &= f_a(w)
 \end{aligned}$$

- a) Es sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Bestimmen Sie $f(0001011)$.
- b) Beweisen Sie, dass für alle $w \in \Sigma^*$ und alle $a \in \Sigma$ gilt:

1. $|f(w)| \leq |w|$
2. $f(w)$ enthält kein Teilwort der Form aa .

Hinweis: Beweisen Sie (durch Induktion) zunächst jeweils hilfreiche Aussagen für die Funktionen f_a .

Abgabe: Von 3. bis 5. Mai in den Übungsgruppen. Bitte geben Sie Ihre Übungsgruppe auf der Lösung an.