Ludwig-Maximilians-Universität München SS 2005
Institut für Informatik Lösungsvorschlag 10
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. D. Pattinson

Prozessalgebra

Aufgabe 10-1 **Parkscheinautomat** (keine Abgabe)

a) Durch das auszeichnen von gewissen Aktionen als kommunizierend können wir erzwingen, dass diese gleichzeitig ausgeführt werden. Dh. wir müssen überlegen, welche Aktionen gleichzeitig ausgeführt werden *müssen*, damit das Gesamtsystem die gewünschten Eigenschaften hat. Dies führt dazu, die Aktionen

$\texttt{ticket}$ und $\texttt{öffnen}$ sowie $\texttt{schießen}$ und $\texttt{bereit}$

als kommunizierend auszuzeichnen.

Ohne Resktriktion können nun, aber müssen nicht (!) die als kommunizierend ausgezeichneten Aktionen gleichzeitig ausgeführt werden. Die Restriktion erlaubt es uns nun, zu verbieten, dass gewisse Aktionen "einzeln" ausgeführt werden. Dies sind in diesem Falle genau die kommunizierenden Aktionen, da wir ja erzwingen wollen, das diese gleichzeitig mit ihrem jeweiligen Partner ausgeführt werden. Insofern erhalten wir

$$R = \{\texttt{ticket}, \texttt{öffnen}, \texttt{schießen}, \texttt{bereit}\}$$

als die verlangte Restriktionsmenge.

b) Um den Prozess q zu finden, betrachten wir alle möglichen Akionsfolgen, die $p \equiv \partial_R(S \parallel A)$ ausführen kann. Dies ergibt

$$p = k \cdot \gamma(\texttt{öffnen}, \texttt{ticket}) \cdot (\texttt{fahren} + \texttt{warten}) + \gamma(\texttt{schießen}, \texttt{bereit}) \cdot p$$

also vermuten wir, dass

$$q \equiv \mu x(k \cdot \gamma(\texttt{öffnen}, \texttt{ticket}) \cdot (\texttt{fahren} + \texttt{warten}) + \gamma(\texttt{schießen}, \texttt{bereit}) \cdot x$$

das gleiche Verhalten wir p modelliert. Wir zeigen nun $p = q$, indem wir eine verkürzte Herleitung (die nicht alle Anwendungen der Regeln explizit macht) in Σ_{ACPR} angeben.

$$\begin{aligned}
\partial_R(S \parallel A) &= \partial_R(S \mathbin{⫝̸} A + A \mathbin{⫝̸} S + A \mid S) \\
&= \partial_R(S \mathbin{⫝̸} A + A \mathbin{⫝̸} S + \delta) \\
&= \partial_R(\texttt{öffnen}\ ((\texttt{fahren}\ + \texttt{warten}\ )\texttt{schießen}\ S \parallel A) + \texttt{knopf}\ (\texttt{ticket}\ \texttt{bereit}\ A \parallel S)) \\
&= \texttt{knopf}\ \partial_R(\texttt{ticket}\ \texttt{bereit}\ A \parallel S) \\
&= \texttt{knopf}\ \partial_R(\texttt{ticket}\ \texttt{bereit}\ A \mathbin{⫝̸} S + S \mathbin{⫝̸} \texttt{ticket}\ \texttt{bereit}\ A + \texttt{ticket}\ \texttt{bereit}\ A \mid S) \\
&= \texttt{knopf}\ \ \gamma(\texttt{ticket}\ , \texttt{öffnen}\ )\partial_R(\texttt{bereit}\ A \parallel (\texttt{fahren}\ + \texttt{warten}\ )\texttt{schießen}\ S) \\
&= \texttt{knopf}\ \gamma(\texttt{ticket}\ , \texttt{öffnen}\ )\partial_R(\texttt{bereit}\ A \mathbin{⫝̸} (\texttt{fahren}\ + \texttt{warten}\ )\texttt{schießen}\ S + \\
&\quad (\texttt{fahren}\ + \texttt{warten}\ )\texttt{schießen}\ S \mathbin{⫝̸} \texttt{bereit}\ A \\
&\quad \texttt{bereit}\ A \mid (\texttt{fahren}\ + \texttt{warten}\ )\texttt{schießen}\ S) \\
&= \texttt{knopf}\ \gamma(\texttt{ticket}\ , \texttt{öffnen}\ )\partial_R(\texttt{fahren}\ + \texttt{warten}\ )(\texttt{schießen}\ S \parallel \texttt{bereit}\ \ A)) \\
&= \texttt{knopf}\ \ \gamma(\texttt{ticket}\ , \texttt{öffnen}\ )(\texttt{fahren}\ + \texttt{warten}\ )\partial_R(\texttt{schießen}\ \ S + \texttt{bereit}\ \ A)) \\
&= \texttt{knopf}\ \ \gamma(\texttt{ticket}\ , \texttt{öffnen}\ )(\texttt{fahren}\ + \texttt{warten}\ )\gamma(\texttt{schießen}\ , \texttt{bereit}\ )(S \parallel A)
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt mit Regel (P25).

Aufgabe 10-2 **Werkbank-Problem** (keine Abgabe)

Wir verwenden die atomaren Aktionen

- $\mathtt{nimmG}$ nehmen eines geprüften Werkstücks
- $\mathtt{nimmU}$ nehmen eines ungeprüften Werkstücks
- $\mathtt{ablG}$ ablegen eines geprüften Werkstücks
- $\mathtt{ablU}$ ablegen eines ungeprüften Werkstücks
- $\mathtt{verbrG}$ verbrauchen eines geprüften Werkstücks

Für die Werkbänke haben wir zugehörige kommunizierende Aktionen, also zB.$\overline{\mathtt{nimmG}}$ bedeutet das Annehmen eines geprüften Werkstücks seitens der Werkbank G.

Wir beschreiben zunächst die Arbeitszyklen von A_1, A_2, A_3 als Prozesse und erhalten

$$\begin{aligned}
A_1 &= \mathtt{nimmG}(\mathtt{ablG} \parallel \mathtt{ablU}) \cdot A_1 \\
A_2 &= \mathtt{nimmG}\,\mathtt{nimmU}(\mathtt{ablG} + \mathtt{ablG}\,\mathtt{ablG})A_2 \\
A_3 &= \mathtt{verbrG} \cdot A_3
\end{aligned}$$

Es ist nichts über die Reihenfolge der Aktionen von A_1 und A_2 ausgesagt; wir hätten genauso $A_2 = (\mathtt{nimmG} \parallel \mathtt{nimmU})(\mathtt{ablG} + \mathtt{ablG})A_3$ schreiben können; dies hat auf die Lösung der Aufgabe aber keinen Einfluss.

Wir nehmen nun zunächst an, wir hätten unendlich viele Variablen zur Verfügung und definieren Prozesse G_k und U_k, die die Werkbänke G und U modellieren, wobei genau k Objekte auf der jeweiligen Werkbank liegen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
G_0 &\equiv \overline{\mathtt{ablG}}G_1 \\
G_1 &\equiv \overline{\mathtt{ablG}} \cdot G_2 + \overline{\mathtt{nimmG}}G_0 \\
G_k &\equiv \overline{\mathtt{ablG}}G_{k+1} + (\overline{\mathtt{nimmG}} + \overline{\mathtt{verbrG}})G_{k-1} \qquad (k \geq 2)
\end{aligned}$$

für G und

$$\begin{aligned}
U_0 &\equiv \overline{\mathtt{ablU}}U_1 \\
U_k &\equiv \overline{\mathtt{ablU}}U_{k+1} + \mathtt{nimmU}\,U_{k-1} \qquad (k \geq 1)
\end{aligned}$$

Beachte, dass die Werkbank G_1, die genau ein geprüftes Werkstück enthält, dem Arbeiter A_3 nicht gestattet, dieses zu verbrauchen (denn dann würde der Prozess stecken bleiben). Wir setzen nun $G = G_1$ und $U = U_0$. Mit Hilfe des Paralleloperators können wir es vermeiden, unendlich viele Variablen zu benutzen. Die Idee ist, dass eine Werkbank, die k ungeprüfte Obkjete enthält, durch den Term $\underbrace{\overline{\mathtt{nimmU}}\ldots\overline{\mathtt{nimmU}}}_{k \text{ mal}}$ repräsentiert werden kann. Dies führt zu folgenden Definitionen

$$\begin{aligned}
U_0 &\equiv \overline{\mathtt{ablU}}(\overline{\mathtt{nimmU}} \parallel U_0) \\
G_0 &\equiv \overline{\mathtt{ablG}} \cdot G_1 \\
G_1 &\equiv \overline{\mathtt{ablG}}G_2 + \overline{\mathtt{nimmG}}\,G_0) \\
G_2 &\equiv \overline{\mathtt{ablG}}((\overline{\mathtt{nimmG}} + \mathtt{verbrG}) \parallel G_2) + (\overline{\mathtt{nimmG}} + \overline{\mathtt{verbrG}})G_1
\end{aligned}$$

die das gleiche leisten.

Aufgabe 10-3 **Bisimilarität mit Rekursion** (12 Punkte)

Wir setzen

$$t_a \equiv \mu x(ax) \qquad t_d \equiv \mu_1 x_1 x_2(ax_2, ax_1)$$

$$t_b \equiv \mu_1 x_1 x_2(ax_1 \mathbin{\|\!\_} x_2, ax_2 \mathbin{\|\!\_} x_1) \qquad t_e \equiv \mu_1 x_1 x_2(ax_1 + ax_2, a) + a$$

$$t_c \equiv \mu x(ax + a)$$

Die einzigen Bisimilaritäten sind $t_a = t_b = t_d$; alle anderen Terme sind jeweils paarweise nicht bisimilar.

1. Wir zeigen zunächst $t_a = t_d$. Sei dazu $t_1 \equiv ax_2$, $t_2 \equiv ax_1$ und $p_1 = p_2 \equiv \mu x(ax)$. Wir erhalten

   $$t_1^{[x_1/p_1, x_2/p_2]} = ap_2 \overset{(P23)}{=} p_2 = p_1 \text{ und } t_2^{[x_1/p_1, x_2/p_2]} = ap_1 \overset{(P23)}{=} p_1 = p_2$$

   Nun folgt mit $(P24)$ dass $p_1 = \mu_1 x_1 x_2(t_1, t_2)$, also die behauptete Gleichheit. NB: Es folgt ausserdem, dass $p_2 = \mu_2 x_1 x_2(t_1, t_2)$, wir haben also “zu viel” gezeigt, was aber nicht vermeidbar ist.

2. Wir zeigen nun $t_a = t_b$. Unsere Stragegie ist die folgende. Setze $p = p_1 = p_2 \equiv \mu x(ax)$ und $t_1 = ax_1 \mathbin{\|\!\_} x_2$ sowie $t_2 = ax_2 \mathbin{\|\!\_} x_1$. Dann gilt

   $$\begin{aligned} t_1^{[x_1/p_1, x_2/p_2]} &= ap_1 \mathbin{\|\!\_} p_2 &&\overset{(P8)}{=} a(p_1 \parallel p_2) \\ t_2^{[x_1/p_1, x_2/p_2]} &= ap_2 \mathbin{\|\!\_} p_1 &&\overset{(P8)}{=} a(p_2 \parallel p_1) \end{aligned}$$

   Wenn wir also $p \parallel p$ gezeigt hätten, könnten wir folgern, dass

   $$\begin{aligned} t_1^{[x_1/p_1, x_2/p_2]} &= a(p_1 \parallel p_2) = ap_1 = p_1 \\ t_2^{[x_1/p_1, x_2/p_2]} &= a(p_2 \parallel p_1) = ap_2 = p_2 \end{aligned}$$

   und die behauptete Gleichheit folgt dann mit (P24). Um die Gleichheit zu beweisen, müssen wir also noch $p \parallel p = p$ zeigen. Dies ist eine weitere Anwendung der Regel (P24), und geht wie folgt:

   $$\begin{aligned} \mu x(ax) \parallel \mu x(ax) &= \mu x(ax) \mathbin{\|\!\_} \mu x(ax) + \mu x(ax) \mathbin{\|\!\_} \mu x(ax) + \mu x(ax) \mid \mu x(ax) && (P6_c) \\ &= \mu x(ax) \mathbin{\|\!\_} \mu x(ax) + \mu x(ax) \mid mux(ax) && (P3) \\ &= \mu x(ax) \mathbin{\|\!\_} \mu x(ax) + a\mu x(ax) \mid a\mu x(ax) && (P23) \\ &= \mu x(ax) \mathbin{\|\!\_} \mu x(ax) + (a \mid a)(\mu x(ax) \parallel \mu x(ax)) && (P13) \\ &= \mu x(ax) \mathbin{\|\!\_} \mu x(ax) + \delta(\mu x(ax) \parallel \mu x(ax)) && (P18) \\ &= \mu x(ax) \mathbin{\|\!\_} \mu x(ax) + \delta && (P17) \\ &= \mu x(ax) \mathbin{\|\!\_} \mu x(ax) && (P16) \\ &= a\mu x(ax) \mathbin{\|\!\_} \mu x(ax) && (P23) \\ &= a(\mu x(ax) \parallel \mu x(ax)) && (P8) \end{aligned}$$

   Mit $s \equiv ax$ und $q \equiv \mu x(ax) \parallel \mu x(ax)$ gilt also $s^{[x/q]} = aq = q$, somit nach (P24) $q = \mu x(ax)$. Damit ist die fehlende Behauptung $\mu x(ax) \parallel \mu x(ax) = \mu x(ax)$ bewiesen.