Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. D. Pattinson

SS 2005
Übungsblatt 11

Prozessalgebra

Aufgabe 11-1 **Präfixform und Projektionen** (keine Abgabe)

Wir betrachten die Prozesse

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv \mu_1 x_1 x_2 (b + (a+\delta)x_2, ax_1 + b) \\ p_2 &\equiv \mu_2 x_1 x_2 (b + (a+\delta)x_2, ax_1 + b) \\ p_3 &\equiv \mu x (\partial_{\{a,\bar{a}\}}(ax \parallel \bar{a}x)). \end{aligned}$$

a) Beachte, dass $\Sigma_{\text{ACPR}} \vdash b + (a+\delta)x_2 = b + ax_2$, wir können also den Term $b + ax_2$ für die Berechnung der Präfixform verwenden. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \varphi(p_1) &= b + ap_2 && (\varphi 8) \\ \varphi(p_2) &= ap_1 + b && (\varphi 8) \end{aligned}$$

Für die ausgezeichnete Präfixform von p_3 setze $R = \{a, \bar{a}\}$, $t = \partial_R(ax \parallel \bar{a}x)$. Um die Regel $(\varphi 8)$ anwenden zu können, müssen wir zunächst einen Term t' in Präfixform bestimmen mit $\Sigma_{\text{ACPR}}, x = t \vdash t = t'$. Dies gilt zB. mit $t' \equiv a_\gamma \partial_R(x \parallel x)$. Wir erhalten dann mit $(\varphi 8)$: $\varphi(p_3) = a_\gamma \partial_R(p_3 \parallel p_3)$.

b) Für die dritte Projektion von p_1, p_2 berechnen wir zunächst die Projektionen mit niedrigerem Index. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \pi_0(p_1) &= \pi_0(\varphi(p_1)) \\ &= \pi_0(b) + \pi_0(ap_2) && (\pi 3) \\ &= \delta + \delta && (\pi_1, \pi_2) \\ \pi_0(p_2) &= \pi_0(\varphi(p_2)) = \delta + \delta && (\text{(analog)}\pi_1(p_1) = \pi_1(\varphi(p_1)) \\ &= \pi_1(b) + \pi_1(ap_2) && (\pi 3) \\ &= b + a\pi_0(p_2) && (\pi 1, \pi_2) \\ &= b + a(\delta + \delta) \\ \pi_1(p_2) &= \pi_1(\varphi(p_2)) = a(\delta+\delta) + b && \text{(analog)} \\ \pi_2(p_1) &= \pi_2(b + ap_2) \\ &= \pi_2(b) + \pi_2(ap_2) && (\pi 3) \\ &= b + a\pi_1(p_2) && (\pi 1, \pi_2) \\ &= b + a(a(\delta+\delta) + b) \\ \pi_2(p_2) &= \pi_2(ap_1 + b) = a(b + a(\delta+\delta)) + b && \text{(analog)} \\ \pi_3(p_1) &= \pi_3(b + ap_2) \\ &= \pi_3(b) + \pi_3(ap_2) && (\pi 3) \\ &= a + b\pi_2(p_2) && (\pi_1, \pi_2) \\ &= a + b(a(b + a(\delta+\delta)) + b) \\ \pi_3(p_2) &= \pi_3(ap_1 + b) = a(b + a(a(\delta+\delta) + b)) + b && \text{(analog)} \end{aligned}$$

Für p_3 berechnen verwenden wir 4.3.4. der Vorlesung, und zeigen zunächst, dass $p_3 = \mu x(a_\gamma x)$. Dies folgt mit Hilfe von Satz 4.2.4., da $\partial_R(\mu x(a_\gamma x) \parallel \partial_R(\mu x(a_\gamma x)) = a_\gamma \partial_R(\mu x(a_\gamma x) \parallel \partial_R(\mu x(a_\gamma x))$. Nun haben wir $\pi_k(p_3) = \pi_k(\mu x(a_\gamma x)$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
\pi_0(p_3) &= \pi_0(\mu x(a_\gamma x)) = \pi_0(\varphi(\mu x(a_\gamma x)) = \pi_0(a_\gamma \mu x(a_\gamma x)) = \delta \\
\pi_1(p_3) &= \pi_1(\mu x(a_\gamma x)) = \pi_1(\varphi(\mu x(a_\gamma x)) = a_\gamma \pi_0(\mu x(a_\gamma x)) = a_\gamma \delta \\
\pi_2(p_3) &= \pi_2(\mu x(a_\gamma x)) = \pi_2(\varphi(\mu x(a_\gamma x)) = a_\gamma \pi_1(\mu x(a_\gamma x)) = a_\gamma a_\gamma \delta \\
\pi_3(p_3) &= \pi_3(\mu x(a_\gamma x)) = \pi_3(\varphi(\mu x(a_\gamma x)) = a_\gamma \pi_2(\mu x(a_\gamma x)) = a_\gamma a_\gamma a_\gamma \delta
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11-2 **Herleitungen in Σ_{ACPR^+}** (keine Abgabe)

a) Für $\mu x(axb) = \mu y(ayc)$ zeigen wir folgende Behauptung durch Induktion nach k:

Für alle $k \in \mathbb{N}, r \in \mathcal{P}$ und $j \in \mathbb{N}$ gilt $\pi_k(\mu x(axr)r^j) = a^k\delta$.

Wenn wir das gezeigt haben, folgt $\pi_k(\mu x(axb) = a^k\delta = \pi_k(\mu y(ayc))$ und somit die behauptete Gleichheit mit $(P25)$.

Induktionsanfang: $k = 0$. Seien r und j beliebig. Dann gilt $\varphi(\mu x(axr)r^j) = a\mu x(axr)rr^j$, und damit $\pi_0(\mu x(axr)r^j) = \pi_0(a\mu x(axr)rr^j) = \delta$.

Induktionsschritt: $k \to k+1$. Seien wieder r und j beliebig. Dann gilt $\pi_{k+1}(\mu x(axr)r^j) = \pi_{k+1}(\varphi(\mu x(axr)r^j)) = \pi_{k+1}(a\mu x(axr)rr^j) = a\pi_k(\mu x(axr)r^{j+1}) = aa^k\delta = a^{k+1}\delta$ nach Induktionsvoraussetzung (beachte, das die Induktionsvoraussetzung für ***beliebiges*** j gilt).

b) $\mu x(a(x \parallel b) + c(x \parallel d)) = \mu y(a(b \parallel y) + c(d \parallel y))$

Hier ist es mühsam, die Projektionen zu berechnen, und eine Herleitung in Σ_{ACPR} zählt natürlich auch als Herleitung in Σ_{ACPR^+}.

Setze also $t \equiv a(x \parallel b) + c(x \parallel d)$ und $p \equiv \mu y(a(b \parallel y) + c(d \parallel y))$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
p &= a(b \parallel p) + c(d \parallel p) && (P23) \\
&= a(p \parallel b) + c(p \parallel d) && \text{(Satz 3.2.5)} \\
&= t^{[x/p]}
\end{aligned}
$$

und mit (P24) folgt die Behauptung.

Aufgabe 11-3 **Rekursion mit Paralleloperator** (4 Punkte)

Wir setzen $p \equiv \mu x(a \parallel bx)$ und erhalten folgenden informellen Ableitungsgraph:

$$
\begin{tikzcd}
& p \arrow[dl, bend right, "a"'] \arrow[dr, "b"] & & \\
bp \arrow[ur, bend right, "b"'] & & a \parallel p \arrow[ul, bend right, "a"'] \arrow[dr, "b"'] & \\
& & & a \parallel a \parallel p \arrow[ul, bend right, "a"']
\end{tikzcd}
$$

$\dots$

Wir setzen nun (zunächst informell) $p_n = a \parallel \cdots \parallel a \parallel p$ (n mal) und erhalten folgende Gleichungen:

$$p = p_0 = abp_0 + bp_1 \quad p_1 = ap_0 + bp_2 \quad p_2 = ap_1 + bp_3 \dots$$

Formaler definieren wir induktiv $t_0 = abx_0 + bx_1$ und $t_{n+1} = ax_n + bx_{n+2}$. Mit $X = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ setzen wir nun $q = \mu_0 X(T)$ und behaupten, dass $p = q$. Mit Satz 4.2.4 ist zu zeigen:

$$p_0 = abp_0 + bp_1 \text{ und } p_{n+1} = ap_n + bp \text{ für alle } n \geq 0$$

Wir zeigen zunächst $p_0 = abp_0 + b(p_0 \parallel a)$ durch folgende Rechnung.

$$\begin{aligned}
p_0 &= a \parallel (bp_0) && (P23)\\
&= a \mathbin{\underline{\parallel}} (bp_0) + (bp_0) \mathbin{\underline{\parallel}} a + (a \mid b)p_0 && (P6_c, P12)\\
&= abp_0 + b(p_0 \parallel a) + \delta && (P8, P18, P17)\\
&= abp_0 + b(p_0 \parallel a) && (P16)
\end{aligned}$$

Nach Definition von p_1 gilt nun bereits $p_0 = abp_0 + bp_1$. Die zweite zu zeigende Gleichung beweisen wir durch indukiton nach n. Für $n = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
p_1 &= a \mathbin{\underline{\parallel}} p_0 + p_0 \mathbin{\underline{\parallel}} a + p_0 \mid a && (P6_c)\\
&= ap_0 + (abp_0 + bp_1) \mathbin{\underline{\parallel}} a + (abp_0 + bp_1) \mid a && (P23)\\
&= ap_0 + a(bp_0 \parallel a) + b(p_1 \parallel a) + (a \mid a)(bp_0) + (b \mid a)p_1 && (P7, P8, P9, P15, P11)\\
&= ap_0 + ap_0 + b(p_1 \parallel a) + \delta + \delta && (P23, P18, P17)\\
&= ap_0 + bp_2
\end{aligned}$$

wie erhofft. Für den Indukitonsschritt zeigt man zunächst $a \mid p_n = \delta$ (einfach, aber klar , da es keine Kommunikationsaktionen gibt) und erhält:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= a \mathbin{\underline{\parallel}} p_n + p_n \mathbin{\underline{\parallel}} a + p_n \mid a && (P6_c)\\
&= ap_n + (ap_{n-1} + bp_{n+1}) \mathbin{\underline{\parallel}} a + \delta && (IV, P7)\\
&= ap_n + a(p_{n-1} \parallel a) + b(p_{n+1} \parallel a) && (P9, P8)\\
&= ap_n + ap_n + bp_{n+1} && (Def. p_n)\\
&= ap_n + bp_{n+1} && (P3)
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 11-4 **Multimengen** (2 + 2 + 4 Punkte)

Sei $D = \{0, 1\}$. Wir verwenden die atomaren aktionen $0, 1, \bar{0}, \bar{1}$ mir der Bedeutung “Einfügen von 0 (bzw. 1)” und “Entnehmen von 0 (bzw. 1); die gequerten Aktionen sind also die Entnahmen.

a) Wir verwenden doppelte Indices und definieren einen Prozess $p_{n,k}$, der einen Bag darstellt, in dem n Nullen und k Einsen sind. Dies führt zur Definition

$$\begin{aligned}
p_{0,0} &= 0p_{1,0} + 1p_{0,1}\\
p_{n,0} &= 0p_{n+1,0} + 1p_{n,1} + \bar{0}p_{n-1,0} && (n \geq 1)\\
p_{0,k} &= 0p_{1,k} + 1p_{0,k+1} + \bar{1}p_{0,k-1} && (k \geq 1)\\
p_{n,k} &= 0p_{n+1,k} + 1p_{n,k+1} + \bar{0}p_{n-1,k} + \bar{1}p_{n,k-1} && (n, k \geq 1).
\end{aligned}$$

Formal setzen wir $X = (x_{n,k})_{n,k \geq 0}$ und definieren die Terme

$$\begin{aligned}
t_{0,0} &= 0x_{1,0} + 1x_{0,1}\\
t_{n,0} &= 0x_{n+1,0} + 1x_{n,1} + \bar{0}x_{n-1,0}\\
t_{0,k} &= 0t_{1,j} + 1t_{0,k+1} + \bar{1}t_{0,k-1}\\
t_{n,k} &= 0t_{n+1,k} + 1t_{n,k+1} + \bar{0}t_{n-1,k} + \bar{1}t_{n,k-1}
\end{aligned}$$

Mit $T = (t_{n,k})_{n,k \geq 0}$ erhalten wir den Bag dann als $p_1 = \mu_{0,0} X(T)$.

b) Wir verwenden einen Trick ähnlich zu der letzten Aufgabe, und setzen

$$p_2 = \mu x(0(\bar{0} \parallel x) + 1(\bar{1} \parallel x))$$

c) Wir definieren induktiv $q_{0,0} = p_2$, $q_{n+1,k} = \bar{0} \parallel q_{n,k}$ und $q_{n,k+1} = \bar{1} \parallel q_{n,k}$.

Nach Satz 4.2.4 ist zu zeigen $t_{n,k}^{[x_{n,k}/q_{n,k}]} = q_{n,k}$. Damit erhalten wir folgende Gleichungen, wobei wir (in Abwesenheit von Kommunikationsaktionen) den Operator $|$ gleich zu δ auswerten:

Fall $n = k = 0$.

$$\begin{aligned} q_{0,0} &= 0(\bar{0} \parallel q_{0,0}) + 1(\bar{1} \parallel q_{0,0}) && (P23) \\ &= 0q_{1,0} + 1q_{0,1} && (Defq) \\ &= t_{0,0}^{[\vec{x}/\vec{q}]} \end{aligned}$$

Fall 2: $n > 0, k = 0$.

$$\begin{aligned} q_{n,0} &= \bar{0} \parallel q_{n-1,0} && (Def.q) \\ &= \bar{0} \mathbin{⫝} q_{n-1,0} + q_{n-1,0} \mathbin{⫝} \bar{0} && (P6_c) \\ &= \bar{0}q_{n-1,0} + t_{n-1,0}^{[\vec{x}/\vec{q}]} \mathbin{⫝} \bar{0} \end{aligned}$$

Im Falle $n = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} q_{n,0} &= \bar{0}q_{n-1,0} + t_{n-1,0}^{[\vec{x}/\vec{q}]} \mathbin{⫝} \bar{0} && \text{(wie oben)} \\ &= \bar{0}q_{n-1,0} + (0q_{1,0} + 1q_{0,1}) \mathbin{⫝} 0 \\ &= \bar{0}q_{n-1,0} + 0(q_{1,0} \parallel \bar{0}) + 1(q_{0,1} \parallel \bar{0}) \\ &= \bar{0}q_{n-1,0} + 0q_{n+1,0} + 1q_{n,1} \\ &= t_{n,0}^{[\vec{x}/\vec{q}]} \end{aligned}$$

Im Falle $n > 1$ haben wir $n - 1 > 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} q_{n,0} &= \bar{0}q_{n-1,0} + t_{n-1,0}^{[\vec{x}/\vec{q}]} \mathbin{⫝} \bar{0} && \text{(wie oben)} \\ &= \bar{0}q_{n-1,0} + (0q_{n+1,0} + 1q_{n,1} + \bar{0}q_{n-1,0} \mathbin{⫝} 0 \\ &= \bar{0}q_{n-1,0} + 0(q_{n+1,0} \parallel \bar{0}) + 1(q_{n,1} \parallel \bar{0} + \bar{0}(q_{n-1,0} \parallel \bar{0})) \\ &= \bar{0}q_{n-1,0} + 0q_{n+1,0} + 1q_{n,1} \\ &= t_{n,0}^{[\vec{x}/\vec{q}]} \end{aligned}$$

, wie verlangt.

Fall $n > 0, k = 0$. Analog.

Fall $n > 0, k > 0$. Ähnlich, durch Einsetzen der entsprechenden Definition von $t_{n,k}$.