

Prozessalgebra

Aufgabe 12-1 Bisimulationen rekursiver Prozesse (keine Abgabe)

a) Sei $p \equiv \mu x(a(x \parallel b) + c(x \parallel d))$ und $q \equiv \mu y(a(b \parallel y) + c(d \parallel y))$. Wir setzen

$$\beta = \{(p \parallel r_1 \parallel \dots \parallel r_n, q \parallel r_1 \parallel \dots \parallel r_n) \mid n \geq 0, r_1, \dots, r_n \in \{b, d\}\}.$$

Dann ist β Bisimulation (sieht man leicht, was aber nicht verlangt), und $(p, q) \in \beta$ (Fall $n = 0$).

b) Es sei $p \equiv \mu x(abcx)$, $q \equiv \mu y(\bar{a}\bar{c}\bar{y})$ und $r \equiv \mu z(a_\gamma bc_\gamma z)$.

Mit $R = \{a, \bar{a}, c, \bar{c}\}$ leistet die Bisimulation

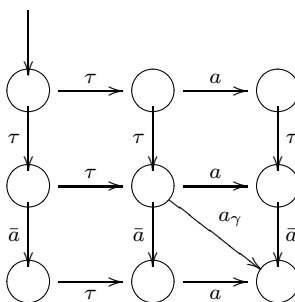
$$\beta = \{(\partial_R(p \parallel q), r), (\partial_R(bcp \parallel \bar{c}q)mbc_\gamma r), (\partial_R(cp \parallel \bar{c}q), c_\gamma r)\}$$

[das gewünschte.

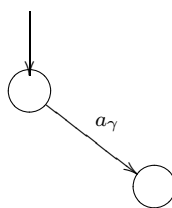
Aufgabe 12-2 Prozessgraphen in $ACP^\tau R$ (keine Abgabe)

Es seien a, \bar{a}, i, o atomare Aktionen, $\mathcal{J} = \{a_\gamma\}$ und $\mathcal{R} = \{a, \bar{a}\}$.

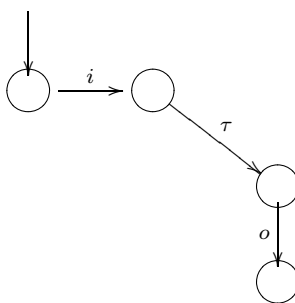
a) Für $\tau a \parallel \tau \bar{a}$ erhalten wir



b) Für $\tau a | \tau \bar{a}$ ergibt sich



c) Schliesslich für $\tau_{\mathcal{J}}(\partial_R(ia \parallel \bar{a}o))$:



Aufgabe 12-3

Gleichen rekursiver Prozesse

(5 Punkte)

- a) Wir setzen $t_1 \equiv (a \parallel b)x_1 + x_2$ und $t_2 \equiv c$ sowie $p_1 \equiv \mu x((a \parallel b)x + c)$. Mit $p_2 \equiv c$ gilt dann

$$\begin{aligned} t_1^{[x_1/t_1, x_2/p_2]} &= (a \parallel b)p_1 + p_2 \stackrel{(P23)}{=} p_1 \\ t_2^{[x_1/p_1, x_2/p_2]} &= c = p_2 \end{aligned}$$

und mit (P24) folgt $\mu_1 x_1 x_2(t_1, t_2) = p_1$ wie verlangt.

- b) Wir setzen $t_1 \equiv aax_2$ und $t_2 \equiv bx_1$ sowie $p_1 = \mu x(aabx)$. Mit $p_2 \equiv bp_1$ gilt dann

$$\begin{aligned} t_1^{[x_1/p_1, x_2/p_2]} &= aabp_1 \stackrel{(P23)}{=} p_1 \\ t_2^{[x_1/p_1, x_2/p_2]} &= bp_1 = p_2 \end{aligned}$$

und mit (P24) folgt $\mu_1 x_1 x_2(t_1, t_2) = p_1$ wie verlangt.

Aufgabe 12-4

Verhaltensgleichheit in $ACP^\tau R$

7 Punkte

- a) Sei $p \equiv \tau(\tau a + \tau \tau b)$ und $q \equiv a + b$. Dann gilt $p \not\equiv_0$, und damit auch $p \not\equiv_\tau q$. Wir zeigen das durch einen Widerspruchsbeweis.

Annahme: $p \equiv_0 q$. Dann gibt es eine Verhaltensäquivalenz β mit $(p, q) \in \beta$. Da $p \xrightarrow{\tau} \tau a + \tau \tau b$, gibt es (nach $(\tau BS1)$) q' mit $a + b \xrightarrow{\tau} q'$ und $(\tau a + \tau \tau b, q') \in \beta$. Die einzige Möglichkeit hierfür ist $q' = q = a + b$, also $(\tau a + \tau \tau b, a + b) \in \beta$. Da nun $\tau a + \tau \tau b \xrightarrow{\tau} a \not\equiv_\tau \checkmark$, gibt es q'' mit $a + b \xrightarrow{\tau} q''$ und $(a, q'') \in \beta$. Die einzige Möglichkeit für q'' ist $q'' \equiv a + b$, damit $(a, a + b) \in \beta$. Dies widerspricht aber $(\tau BS3)$, da $a + b \xrightarrow{b} \checkmark$, aber $a \not\xrightarrow{b} \checkmark$.

- b) Sei $p \equiv \tau a | \bar{a}$ und $q \equiv \tau(a | \bar{a})$. Dann gilt $p \equiv_0 q$, aber $p \not\equiv_\tau q$.

Wir zeigen zunächst $p \equiv_0 q$ durch Angabe einer Beobachtungsäquivalenz. Setze

$$\beta = \{(\tau a | \bar{a}, \tau(a | \bar{a})), (\tau a | \bar{a}, a | \bar{a})\}.$$

Wir zeigen nun, dass β eine beobachtungsäquivalenz ist.

$(\tau BS1)$ ist trivialerweise erfüllt, da $\tau a | \bar{a} \xrightarrow{x} p \not\xrightarrow{x} \checkmark$ nicht möglich ist.

$(\tau BS2)$ Betrachte $(\tau a | \bar{a}, \tau(a | \bar{a})) \in \beta$ und gelte $\tau(a | \bar{a}) \xrightarrow{x} q'$. Dann $x = \tau$ und $q' \equiv a | \bar{a}$. Setze $p' \equiv \tau a | \bar{a}$. Dann gilt $\tau a | \bar{a} \xrightarrow{\tau} p'$ und $(p', q') \in \beta$.

Für das Paar $(\tau a | \bar{a}, a | \bar{a})$ ist $a | \bar{a} \xrightarrow{x} q'$ mit $q' \not\xrightarrow{x} \checkmark$ nicht möglich.

$(\tau BS3)$ Wir zeigen $(\tau BS3)$ für beide Elemente von β simultan. Es gilt

$$\tau a | \bar{a} \xrightarrow{x} \checkmark \iff x = a_\gamma \iff \begin{cases} \tau(a | \bar{a}) \xrightarrow{x} \checkmark \\ a | \bar{a} \xrightarrow{x} \checkmark \end{cases}$$

Es ist noch zu zeigen, dass $p \not\equiv_\tau q$. Wenn wir annehmen, dies sei der Fall, gilt mit $(\tau BS5)$, da $\tau(a | \bar{a}) \xrightarrow{\tau} a | \bar{a} \not\xrightarrow{\tau} \checkmark$: Es gibt $p' \in \mathcal{P}_\tau$ mit $a | \bar{a} \xrightarrow{\tau} p'$ und $p' \equiv_0 a | \bar{a}$. Aber $a | \bar{a} \xrightarrow{\tau} p'$ ist nicht möglich.

- c) Sei $p \equiv \tau_J(\partial_R(ia \parallel \bar{a}o))$ und $q \equiv io$. Dann gilt $p \equiv_0 q$ und $p \equiv_\tau q$.

Wir zeigen zunächst $p \equiv_0 q$ durch Angabe einer Beobachtungsäquivalenz. Setze

$$\beta = \{(\tau_J \partial_R(ia \parallel \bar{a}o), io), (\tau_J \partial_R(a \parallel \bar{a}o), o), (\tau_J \partial_R(o), o)\}$$

Wir zeigen nun $(\tau BS1)$ bis $(\tau BS3)$, wobei wir jedes Element von β einzeln betrachten.

- ($\tau BS1$) – Gilt $\tau_J \partial_R(ia \parallel \bar{a}o) \xrightarrow{x} p'$, so $x = i$ und $p' \equiv \tau_J \partial_R(a \parallel \bar{a}o)$. Mit $q' \equiv o$ gilt $io \xrightarrow{o} q'$ und $(p', q') \in \beta$.
- Gilt $\tau_J \partial_R(a \parallel ao) \xrightarrow{x} p'$, so $x = \tau$ und $p' \equiv \tau_J \partial_R(o)$. Mit $q' \equiv o$ gilt $o \xrightarrow{\tau} q'$ und $(p', q') \in \beta$.
- $\tau_J \partial_R(o) \xrightarrow{x} p' \not\stackrel{\tau}{\rightarrow} \checkmark$ ist nicht möglich.
- ($\tau BS1$) – Gilt $io \xrightarrow{x} q' \not\stackrel{\tau}{\rightarrow} \checkmark$, so ist $x = i$ und $q' \equiv o$. Mit $p' \equiv \tau_J \partial_R(a \parallel \bar{a}o)$ gilt $\tau_J \partial_R(ia \parallel \bar{a}o) \xrightarrow{x} p'$ und $(p', q') \in \beta$.
- $o \xrightarrow{x} q' \not\stackrel{\tau}{\rightarrow} \checkmark$ ist nicht möglich.
- ($\tau BS1$) – Es gilt $\tau_J \partial_R(ai \parallel \bar{a}o) \xrightarrow{x} \checkmark$ genau dann, wenn $io \xrightarrow{x} \checkmark$, da beides unmöglich.
- Es gilt $\tau_J \partial_R(a \parallel \bar{a}o) \xrightarrow{x} \checkmark$ genau dann, wenn $x = o$ genau dann, wenn $o \xrightarrow{x} \checkmark$.
- Es gilt $\tau_J \delta_R(o) \xrightarrow{x} \checkmark$ genau dann, wenn $x = o$ genau dann, wenn $o \xrightarrow{x} \checkmark$.

Wir zeigen nun, dass $p \equiv_{\tau} q$. Die Axiome ($\tau BS4$) und ($\tau BS5$) sind aber trivialerweise erfüllt, weil sowohl $p \xrightarrow{\tau} p'$ als auch $q \xrightarrow{\tau} q'$ nicht passieren kann.