

Prozessalgebra

Aufgabe 13-1

Kongruenzeigenschaften

(keine Abgabe)

Es seien $p, q, r \in \mathcal{P}_\tau$.

- a) Es gelte $p \simeq_0 q$. Wir zeigen $rp \simeq_0 rq$ durch Angabe einer Beobachtungsäquivalenz. Da $p \simeq_0 q$, gibt es eine Beobachtungsäquivalenz β mit $(p, q) \in \beta$. Setze

$$\gamma = \{(rp', rq') \mid (p', q') \in \beta, r \in \mathcal{P}_\tau\} \cup \beta.$$

Es ist leicht zu sehen, dass γ eine Beobachtungsäquivalenz ist.

- b) Es gilt *nicht*, dass $a(b + \tau) \simeq_0 ab$. Wir zeigen dies durch einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, $a(b + \tau) \simeq_0 ab$. Dann gibt es eine Beobachtungsäquivalenz β mit $(a(b + \tau), ab) \in \beta$. Da $a(b + \tau) \xrightarrow{\alpha} \checkmark$, folgt mit $(\tau BS3)$, dass $ab \xrightarrow{\alpha} \checkmark$; dies ist der gewünschte Widerspruch.

Es gilt $p(\tau(q + r) + q) \simeq_0 p(q + r)$. Um dies zu zeigen, genügt im Hinblick auf Teilaufgabe (a) zu zeigen, dass $\tau(q + r) + q$ und $q + r$ beobachtungsäquivalent sind. Die Relation $\beta = \{(\tau(q + r) + q, q + r)\} \cup \{(x, x) \mid x \in \mathcal{P}_\tau\}$ ist eine Beobachtungsäquivalenz, die dies bezeugt.

- c) Es gelte $p \simeq_\tau q$. Dann gilt $rp \simeq_0 rq$ nach Teilaufgabe (a), also sind nur noch $(\tau BS4)$ und $(\tau BS5)$ zu zeigen. Wir zeigen nur $(\tau BS4)$, das Axiom $(\tau BS5)$ ist analog.

Gelte also $rp \xrightarrow{\tau} p'$ *Rightarrow* \checkmark . Wir unterscheiden die folgenden Fälle.

Fall 1. $r \xrightarrow{\tau} r' \not\xrightarrow{\tau} \checkmark$. Dann gilt $rq \xrightarrow{\tau} r'q$ und $r'p \simeq_0 r'q$.

Fall 2. $r \xrightarrow{\tau} \checkmark$. Dann gilt $rq \xrightarrow{\tau} q$ und $p \simeq_0 q$.

Aufgabe 13-2

Verhaltensäquivalenz

(keine Abgabe)

Wir verwenden die folgenden Abkürzungen:

$$p \equiv p'\delta$$

$$p' \equiv \mu x(axb + \tau c)$$

$$q \equiv \tau_J \delta_R(E \parallel V)$$

$$E \equiv \mu y(a(y \parallel d) + r)$$

$$V = \mu_1 x_1 x_2 (\bar{r} c x_2, \bar{d} b x_1)$$

$$V' = \mu_2 x_1 x_2 (\bar{r} c x_2, \bar{d} b x_1)$$

wobei $R = \{r, \bar{r}, d, \bar{d}\}$ und $I = \{r_\gamma, d_\gamma\}$.

Die folgende Relation ist eine Beobachtungsäquivalenz:

$$\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ (p'b^n \delta, \tau_I \partial_R(E \parallel \underbrace{d \parallel \dots \parallel d}_{n \text{ mal}} \parallel V)), \\ (cb^n \delta, \tau_I \partial_R(\underbrace{d \parallel \dots \parallel d}_{n \text{ mal}} \parallel cV')), \\ (b^n \delta, \tau_I \partial_R(\underbrace{d \parallel \dots \parallel d}_{n \text{ mal}} \parallel V')) \}$$

Aufgabe 13-3**Beobachtungs- und Verhaltensäquivalenz II**

(6 Punkte)

(siehe Aufgabe 12-4)

Aufgabe 13-4**Sortieren in \mathcal{P}_τ**

(6 Punkte)

Wir vereinbaren folgende Konvention: Wenn über einen Kanal k *eingelassen* wird, so wird dies durch die Aktion $k(\cdot)$ ausgedrückt; das *Ausgeben* auf k entspricht der kommunizierenden Aktion $\overline{k(\cdot)}$. Weiterhin bezeichne D' die Menge $D' = D \cup \{\text{ack}\}$.

- a) Wir verwenden für jede Folge $\sigma = (d_0, d_1, \dots, d_n)$ eine Variable x_σ ; dabei bezeichnet ϵ die leere Folge.

Beim Sortieren lesen wir zunächst alle Folgeelemente ein, und geben sie dann sortiert aus. Der Prozess *Sort* ist also die Lösung S_ϵ des folgenden Gleichungssystems:

$$S_\sigma = in(req) \cdot O_\sigma + \sum_{d \in D} in(d) \cdot S_{d\sigma}$$

$$O_\sigma = \overline{t(max(\sigma))} O_{delmax(\sigma)}$$

$$O_\epsilon = \overline{t(ack)}$$

Wir haben also die Menge $X = \{x_\sigma \mid \sigma \in D^*\} \cup \{y_\sigma \mid \sigma \in D^*\}$ an Variablen. Die Variable x_σ gehört zum Term S_σ , und die Variable y_σ zu O_σ . Um das Gleichungssystem als Prozessterm zu formulieren, geben wir nun einen Term für jede Variable an, und zwar durch analyse des Gleichungssystems.

Wir haben fuer den Prozess S_σ :

$$t_\sigma \equiv in(req) \cdot y_\sigma + \sum_{d \in D} in(d) \cdot x_{d\sigma}$$

und für den Prozess O_σ

$$s_\sigma \equiv \overline{t(max(\sigma))} y_{delmax(\sigma)} \text{ im Falle } \sigma \neq \epsilon$$

und

$$s_\epsilon \equiv \overline{t(ack)}$$

Damit haben wir eine Menge X von variablen definiert, und eine Menge $T = \{t_\sigma \mid \sigma \in D^*\} \cup \{s_\sigma \mid \sigma \in D^*\}$ definiert, und können nun den Prozess *Sort* angeben als

$$Sort \equiv \mu_{x_\epsilon} X(T).$$

Dann ist der Prozess *Sort* also genau die Lösung des Gleichungssystems für S_ϵ .

- b) Bei Merge lesen wir parallel zwei werte, geben den grösseren der beiden Werte aus und ersetzen den ausgegebenen Wert durch den nächsten, der auf dem selben Kanal geliefert wird. Der Prozess *Merge* ist also die Lösung M des folgenden Gleichungssystems.

$$\begin{aligned}
M &= \sum_{d_1, d_2 \in D'} (t_1(d_1) \parallel t_2(d_2)) \cdot O_{d_1, d_2} \\
O_{d_1, d_2} &= \overline{out(d_1)} \sum_{d'_1 \in D'} t_1(d'_1) \cdot O_{d'_1, d_2} && \text{(für } d_1 > d_2) \\
O_{d_1, d_2} &= \overline{out(d_2)} \sum_{d'_2 \in D'} t_2(d'_2) \cdot O_{d_1, d'_2} && \text{(für } d_1 \leq d_2) \\
O_{ack, d_2} &= \overline{out(d_2)} \cdot \sum_{d'_2 \in D'} t_2(d'_2) \cdot O_{ack, d'_2} \\
O_{d_1, ack} &= \overline{out(d_1)} \cdot \sum_{d'_1 \in D'} t_1(d'_1) \cdot O_{d'_1, ack} \\
O_{ack, ack} &= \overline{out(ack)}
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems müssen wir nun als Term aus \mathcal{P} formulieren. Wie oben wählen wir für M und O_{d_1, d_2} eine Variable und geben für jede Variable eine Gleichung in Form eines Terms an. Wir wählen $X = \{x_0\} \cup \{x_{d_1, d_2} \mid d_1, d_2 \in D'\}$. Wir definieren nun die folgenden Terme:

$$\begin{aligned}
t_0 &= \sum_{d_1, d_2 \in D'} (t_1(d_1) \parallel t_2(d_2)) \cdot x_{d_1, d_2} \\
t_{d_1, d_2} &= \overline{out(d_1)} \sum_{d'_1 \in D'} t_1(d'_1) \cdot x_{d'_1, d_2} && \text{(für } d_1 > d_2) \\
t_{d_1, d_2} &= \overline{out(d_2)} \sum_{d'_2 \in D'} t_2(d'_2) \cdot x_{d_1, d'_2} && \text{(für } d_1 \leq d_2) \\
t_{ack, d_2} &= \overline{out(d_2)} \cdot \sum_{d'_2 \in D'} t_2(d'_2) \cdot x_{ack, d'_2} \\
t_{d_1, ack} &= \overline{out(d_1)} \cdot \sum_{d'_1 \in D'} t_1(d'_1) \cdot x_{d'_1, ack} \\
t_{ack, ack} &= \overline{out(ack)}
\end{aligned}$$

Wenn wir nun $T = \{t_0\} \cup \{t_{d_1, d_2} \mid d_1, d_2 \in D'\}$ setzen, können wir die Lösung M des ersten Gleichungssystems als Term $M \equiv \mu_0 X(T)$ in \mathcal{P} definieren.

- c) Wir definieren die Menge $I = \{\gamma(t_i(d), \overline{t_i(d)}) \mid i = 0, 1, d \in D\}$ und $R = \bigcup_{d \in D} \{t_i(d), \overline{t_i(d)}\}$ und erhalten als Gesamtsystem

$$\tau_I(\partial_R(\text{Sort}_1 \parallel \text{Sort}_2 \parallel \text{Merge}))$$

wobei Sort_i der Prozess aus Teilaufgabe (a) ist, der auf dem Kanal in_i einliest und auf dem Kanal t_i ausgibt ($i = 1, 2$).

Die Retriktion $\partial_R(\cdot)$ garantiert, dass alle Einleseaktionen synchron ausgeführt werden; die Abstraktion $\tau_I(\cdot)$ stellt sicher, dass die internen Übertragungsaktionen auf den Kanälen t_1, t_2 nicht nach aussen sichtbar sind.