

Prozessalgebra

Aufgabe 2-1 Distributivgesetze für Prozesse (keine Abgabe)

Wir betrachten drei Prozesse p, q, r und die Ausdrücke $t_1 \equiv p \cdot (q + r)$ und $t_2 \equiv p \cdot q + p \cdot r$.

a) Der Prozess t_1 wählt zwischen der Ausführung von q und r , *nachdem* er p ausgeführt hat. Bei t_2 wird diese Wahl noch vor der Ausführung von p getroffen.

b) Wir können t_1 und t_2 als gleich ansehen, wenn die Ausführung von q und r nicht von der Umgebung der Prozesse abhängen.

Beispiel: $p = \text{read}(n)$ liest eine Zahl n ein, $q = \text{add}(1, n)$ addiert 1 zu n und $r = \text{add}(2, n)$ addiert 2 zu n . Am Ende der Ausführung wird die gelesene Zahl entweder um 1 oder um 2 größer sein.

c) Die Prozesse t_1 und t_2 sollten als verschieden angesehen werden, wenn die Ausführung der Aktionen q und r von der Umgebung abhängen können. So kann es z.B. sein, dass nach der Ausführung von p die Ausführung von q oder r nicht mehr möglich ist.

Beispiel: $p = \text{read}(n)$, $q = \text{write}(n, \text{disk1})$ und $r = \text{write}(n, \text{disk2})$.

Geht nach der Ausführung von p beispielsweise disk1 kaputt, so kann t_1 immer noch ausgeführt werden, t_2 hingegen nicht mehr, falls schon vor dem Lesen von n entschieden wurde, das n auf disk1 geschrieben werden soll.

Aufgabe 2-2 Variation des Schokoladenautomaten (keine Abgabe)

Wir betrachten die atomaren Aktionen

- 1 €: Einwurf von 1 €
- 2 €: Einwurf von 2 €
- TK: Drücken der Taste "kleine Tafel"
- TG: Drücken der Taste "große Tafel"
- AK: Ausgabe kleine Tafel
- AG: Ausgabe große Tafel.

Der erste Automat hat damit die Form

$$(1\text{€} \cdot 1\text{€} + 2\text{€}) \cdot \text{TK} \cdot \text{AK} + 1\text{€} \cdot \text{TK} \cdot \text{AK}$$

Wenn man bei diesem Automaten nur 1 € eingibt, hat das Drücken der Taste "große Schokolade" keine Wirkung.

Die Geldrückgabe kann wie folgt modelliert werden, wobei wir die neue atomare Aktion (-1€) für die Rückgabe einer 1 €-Münze verwenden:

$$1 \text{ €} (\text{TK} \cdot \text{AK} + \text{TG} \cdot (-1 \text{ €})) + (1 \text{ €} \cdot 1 \text{ €} + 2 \text{ €}) \cdot (\text{TG} \cdot \text{AG} + \text{TK} \cdot (-1 \text{ €}))$$

Dieser Automat übererfüllt die Spezifikation, da er auch bei Eingabe von 2 € und der Wahl einer kleinen Tafel den einen € zurückgibt.

Aufgabe 2-3 Bisimulationen in BSP (7 Punkte)

Entscheiden Sie (mit Begründung), ob es sich bei folgenden Relationen um Bisimulationen handelt:

- a) $\beta_1 = \{(a, a + a)\}$ ist Bisimulation: $a \rightarrow \checkmark$ gdw. $a + a \rightarrow \checkmark$ und es sind keine weiteren Transitionen möglich.
- b) $\beta_2 = \{(ab, a(b + b))\}$ ist keine Bisimulation, denn aus $ab \rightarrow b$ würde folgen dass es $p \in \mathcal{P}_0$ gibt mit $(b, p) \in \beta_2$; aber β_2 enthält kein Element mit erster Komponente b .
- c) $\beta_3 = \{(ab, ab + abc), (b, b), (c, c)\}$ ist keine Bisimulation, denn wäre dies der Fall, so würde es (wie oben) ein Paar $(p, bc) \in \beta_3$ mit zweiter Komponente bc geben.
- d) $\beta_4 = \{(a(b + c)d, a(bd + cd)), ((b + c)d, bd + cd), (d, d)\}$ ist eine Bisimulation: Wir zeigen (BS1) - (BS3) für alle Paare $(p, q) \in \beta_4$ einzeln.
 - $(p, q) = (a(b + c)d, a(bd + cd))$: Wir haben $a(b + c)d \xrightarrow{a} p' := (b + c)d$ (und dies ist die einzige mögliche Transition). Hierzu finden wir $q' = bd + cd$ mit $a(bd + cd) \xrightarrow{a} q'$ und $(p', q') \in \beta_4$. Also ist (BS1) erfüllt; (BS2) ist genau analog. (BS3) ist trivialerweise erfüllt, da keiner der beiden Prozesse p, q terminieren kann.
 - $(p, q) = ((b + c)d, bd + cd)$: Falls $(b + c)d \xrightarrow{x} p'$, so haben wir zwei Fälle.
 - Fall 1:* $x = b$ und $p' = d$. Hierzu finden wir $q' = d$, und da $bd + cd \xrightarrow{b} d$ und $(d, d) \in \beta_4$, ist (BS1) erfüllt. (BS2) zeigt man analog; (BS3) ist trivialerweise erfüllt.
 - Fall 2:* $x = c$ und $p = d$: Analog.
 - $(p, q) = (d, d)$: klar.
- e) $\beta_5 = \{(p + a, p + (a + a)) \mid p \in \mathcal{P}_0\}$ ist keine Bisimulation, denn zum Beispiel hat man für $p = bc$, dass $p + a \xrightarrow{b} c$ und $p + (a + a) \xrightarrow{b} c$, aber $(c, c) \notin \beta_4$.

Aufgabe 2-4 Abschlusseigenschaften von Bisimulationen (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Relationen Bisimulationen sind:

- a) Sei $\beta = \{(x, x) \mid x \in \mathcal{P}_0\}$. Wir zeigen (BS1) - (BS3).
 - (BS3) Gelte $(p, q) \in \beta$. Dann $p \equiv q$. Also $q \xrightarrow{a} \checkmark$ gdw. $p \xrightarrow{a} \checkmark$.
 - (BS1) Gelte $(p, q) \in \beta$, also wieder $p \equiv q$. Wenn $p \xrightarrow{a} p'$, so finden wir $q' \equiv p'$ mit $q' \xrightarrow{a} q'$ und, da $p' \equiv q'$, auch $(p', q') \in \beta$.
 - (BS2) Analog.
- b) Sei $\beta^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \beta\}$ für eine Bisimulation β . Wir zeigen, dass β^{-1} wieder eine Bisimulation ist.
 - (BS1) Sei $(p, q) \in \beta^{-1}$ und gelte $p \xrightarrow{a} p'$. Da $(q, p) \in \beta$, finden wir auf Grund von (BS2) für β ein q' mit $(q', p') \in \beta$, also $(p', q') \in \beta^{-1}$, und $q \xrightarrow{a} q'$.
 - (BS2) Analog.

- (BS3) Gelte $(p, q) \in \beta^{-1}$ und $p \xrightarrow{a} \checkmark$. Da $(q, p) \in \beta$, gilt dies dann und nur dann, wenn $q \xrightarrow{a} \checkmark$.
- c) Wir zeigen, dass $\beta_1\beta_2 = \{(x, z) \mid \exists y.(x, y) \in \beta_1 \wedge (y, z) \in \beta_2\}$ für Bisimulationen β_1 und β_2 wieder eine Bisimulation ist.
- (BS1) Gelte $(p, r) \in \beta_1\beta_2$ mit $p \xrightarrow{a} p'$. Aus $(p, r) \in \beta_1\beta_2$ folgt, dass es $q \in \mathcal{P}_0$ gibt mit $(p, q) \in \beta_1$ und $(q, r) \in \beta_2$. Da nun $p \xrightarrow{a} p'$ und $(p, q) \in \beta_1$, können wir q' finden mit $(p', q') \in \beta_1$ und $q \xrightarrow{a} q'$.
Da nun $(q, r) \in \beta_2$ und $q \xrightarrow{a} q'$, finden wir r' mit $r \xrightarrow{a} r'$ und $(q', r') \in \beta_2$.
Insgesamt folgt $r \xrightarrow{a} r'$ und $(p', r') \in \beta_1\beta_2$.
- (BS2) Analog.
- (BS3) Sei $(p, r) \in \beta_1\beta_2$ und gelte $(p, q) \in \beta_1$, $(q, r) \in \beta_2$. Dann gilt $p \xrightarrow{a} \checkmark$ gdw. $q \xrightarrow{a} \checkmark$ gdw. $r \xrightarrow{a} \checkmark$.
- d) Sei $\beta = \bigcup \mathcal{B}$ für eine Menge \mathcal{B} von Bisimulationen. Dann ist β wiederum eine Bisimulation, denn aus $(p, q) \in \beta$ folgt, dass es eine Bisimulation $\gamma \in \mathcal{B}$ gibt mit $(p, q) \in \gamma$. Die Abschlusseigenschaften von γ implizieren nun die von β .
Genauer:
- (BS1) Gelte $(p, q) \in \beta$. Dann gibt es eine Bisimulation $\gamma \in \mathcal{B}$ mit $(p, q) \in \gamma$. Gilt nun $p \xrightarrow{a} p'$, so können wir ein q' finden mit $q \xrightarrow{a} q'$ und $(p', q') \in \gamma$, also auch $(p', q') \in \beta$.
- (BS2) Analog.
- (BS3) Analog.

Setze nun $\beta = \bigcup \{\gamma \subseteq \mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_0 \mid \gamma \text{ Bisimulation}\}$. Dann ist β eine Bisimulation, und es kann keine größere geben (klar!). Symmetrie und Transitivität folgen nun aus den vorangegangenen Teilaufgaben.