Ludwig-Maximilians-Universität München SS 2005
Institut für Informatik Lösungsvorschlag 3
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. D. Pattinson

Prozessalgebra

Aufgabe 3-1 **Prozessgraphen und endliche Automaten** (keine Abgabe)

a) Ist $\sigma = a_0 \dots a_n$ eine (möglicherweise leere) Folge von Elementen aus $\mathcal{A}$, so schreiben wir kurz $p \xrightarrow{\sigma} q$, falls es $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0$ gibt mit $p \xrightarrow{a_0} p_1 \xrightarrow{a_1} p_2 \dots p_n \xrightarrow{a_n} q$.

Definition des Ableitungsgraphen: $A = (N, E)$, wobei

- N ist die Menge der Knoten, gegeben durch $N = \{q \in \mathcal{P}_0 \cup \{\checkmark\} \mid \exists \sigma \in \mathcal{A}^*. p \xrightarrow{\sigma} q\}$.
- E ist die Menge der markierten Kanten, gegeben durch $E = \{(p, a, q) \in N \times \mathcal{A} \times N \mid p \xrightarrow{a} q\}$.

b) Wir erhalten folgenden Ableitungsgraphen für den Prozess $p \equiv (bc + ac)a(b + c)$:

$$
\begin{tikzcd}
p \arrow[r, bend left, "b"] \arrow[r, bend right, "a"'] & c(a(b+c)) \arrow[r, "c"] & a(b+c) \arrow[r, "a"] & b+c \arrow[r, bend left, "b"] \arrow[r, bend right, "c"'] & \checkmark
\end{tikzcd}
$$

c) Wir betrachten den folgenden endlichen Automaten $A = (Q, \delta, q_0, F)$ mit

- $Q = N$ ist die Menge der Kanten
- $\delta : Q \times \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Q)$ ist die Zustandsübegangsfunktion, definiert durch $\delta(q, a) = \{q' \mid q \xrightarrow{a} q'\}$.
- $F = \{\checkmark\}$ ist der Endzustand.
- $q_0 = p$ ist der Anfangszustand.

Man kann nun leicht sehen, dass für $\sigma \in \mathcal{A}^*$ gilt: $\sigma \in L(A) \iff p \xrightarrow{\sigma} \checkmark$.

Frage: Wir bezeichen mit $L(p)$ die Sprache, die von dem durch p induzierten Automaten erkannt wird. Gilt dann $p = q \iff L(p) = L(q)$?

Die Implikation $\Rightarrow$ gilt immer (formaler Beweis durch Induktion nach Länge der Wörter), für $\not\Leftarrow$ betrachte man beispielsweise die Prozesse $p = a(b + c)$ und $q = ab + ac$.

Aufgabe 3-2 **Rechengesetze für Prozesse** (keine Abgabe)

In allen Teilaufgaben sei $\Delta_0 = \{(p, p) \mid p \in \mathcal{P}_0\}$.

a) Wir zeigen $(p + q) + r = p + (q + r)$ durch Angabe einer Bisimulation. Betrachte

$$\beta = \Delta_0 \cup \{((p + q) + r, p + (q + r)) \mid p, q, r \in \mathcal{P}_0\}$$

Wir zeigen, dass β eine Bisimulation ist; daraus folgt die Behauptung.

(BS1) Sei $(t, s) \in \beta$. Falls $t \equiv s$, so ist nichts zu zeigen. Sei nun $t = (p+q)+r$ und $s = p+(q+r)$ für $p, q, r \in \mathcal{P}_0$ und gelte $t \equiv (p+q) + r\ \overset{a}{t'}$. Dann gilt entweder $p + q \xrightarrow{a} t'$ oder $r\ \overset{a}{t'}$ nach (T2), somit $p \xrightarrow{a} t'$ oder $q \xrightarrow{a} t'$ oder $r \xrightarrow{a} t'$. Wiederum gemäß (T2) folgt $p+(q+r) \xrightarrow{a} t'$; (BS1) ist also erfüllt, da $(t', t') \in \beta$.

(BS2) : Analog.

(BS3) : Analog.

b) Um $(p+q)r = pr + qr$ zu zeigen, betrachten wir

$$\beta = \Delta_0 \cup \{((p+q)r, pr+qr) \mid p,q,r \in \mathcal{P}_0\}.$$

Es ist zu zeigen, dass β eine Bisimulation ist.

(BS1) Gelte $(u,v) \in \beta$. Falls $u \equiv v$, so ist nichts zu zeigen. Sei nun $u \equiv (p+q)r$ und $v \equiv pr+qr$. Falls $u \xrightarrow{a} u'$, so gilt entweder $(p+q) \xrightarrow{a} u'', u'' \neq \checkmark$ und $u' \equiv u''r$, oder $(p+q) \xrightarrow{a} \checkmark$ und $u' \equiv v$.

Fall 1: $(p+q) \xrightarrow{a} u'', u'' \neq \checkmark$ und $u' \equiv u''r$. Dann $p \xrightarrow{a} u''$ oder $q \xrightarrow{a} u''$ nach (T2), also $pr \xrightarrow{a} u''r$ oder $qr \xrightarrow{a} u''r$, somit $pr + qr \xrightarrow{a} u''r$. Da $u''r \equiv u'$ und $\Delta_0 \subseteq \beta$ ist (BS1) erfüllt.

Fall 2: $(p+q) \xrightarrow{a} \checkmark$ und $u' \equiv v$. Dann $p \rightarrow \checkmark$ oder $q \rightarrow \checkmark$ (wieder nach (T2)) und somit $pr \xrightarrow{a} r$ oder $qr \xrightarrow{a} r$. Also $pr + qr \xrightarrow{a} r \equiv u'$ und (BS1) ist erfüllt, da $\Delta_0 \subseteq \beta$.

(BS2) Analog.

(BS3) $(p+q)r \xrightarrow{a} \checkmark$ und $pr + qr \xrightarrow{a} \checkmark$ sind beide nicht möglich.

Aufgabe 3-3 — Rechnen mit Prozessen (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass in der Theorie Σ_{BSP} die folgenden Gleichheiten herleitbar sind:

a) Seinen $p, q \in \mathcal{P}_0$. Nah (P3) gilt $q + q = q$, also $p(q+q) = pq$. Wieder nach (P3) erhalten wir $pq + pq = pq$, somit insgesamt $p(q+q) = pq = pq + pq$.

Beachte, das im Allgemeinen $p(q+r) \neq pq + pr$!

b) Wir lösen die Klammern schrittweise auf und erhalten $(a+b)c = ac + bc$ nach (P4), somit $((a+b)c + d) + e = ((ac+bc)+d)e = (ac+bc)e + de = ace + bce + de$.

Aufgabe 3-4 — Gleicheit von Prozessen? (6 Punkte)

Es seien $a, b, c \in \mathcal{A}$.

a) $(a+b)c = (a+b)c + bc$ ist gültig, denn nach Satz 2.3.1 erhalten wir $(a+b)c = ac + bc$, und da $bc = bc + bc$ insgesamt $(a+b)c = ac + bc + bc = a(c+b) + bc$.

b) $c(a+b) = c(a+b) + cb$ ist falsch. Angenommen, die behauptete Gleichheit wäre richtig. Dann gäbe es eine Bisimulation β mit $(c(a+b), c(a+b)+cb) \in \beta$. Setze $p \equiv c(a+b)$ und $q \equiv c(a+b) + cb$. Es gilt $q \xrightarrow{c} b$. Nach (BS2) folgt, dass es $p' \in \mathcal{P}_0$ gibt mit $p \xrightarrow{c} p'$ und $(p', b) \in \beta$. Da $c(a+b) \xrightarrow{c} a + b$ die einzig mögliche Transition ist, folgt $p' = (a+b)$. Damit $((a+b), b) \in \beta$. Nun gilt $(a+b) \xrightarrow{a} \checkmark$ aber $b \xrightarrow{a} \checkmark$ ist nicht möglich, also ist (BS3) verletzt.